Construções geométricas, prazer dos deuses ...

Eduardo Veloso

Este artigo surge na sequência da interessante proposta feita pela Branca Silveira na sua secção de *Tecnologias* na *Educação Matemática* (*Educação e Matemática*, nº 71). Tem a ver com os trabalhos do italiano Mascheroni sobre o que é possível construir, geometricamente, se apenas se utiliza um compasso. Mas comecemos pelo princípio ...

O jogo das construções euclidianas

Como sempre, o princípio não se sabe quando foi, mas o que não há dúvidas é que 300 anos antes da nossa era, quando Euclides publicou a sua obra memorável, os *Elementos*, escreveu os seus resultados matemáticos sob a forma de problemas de construções geométricas (por exemplo: "construir um triângulo equilátero tendo um dado segmento por lado"), e as suas proposições assumem frequentemente o seguinte formato:

a) descrição de um processo de construção;

b) demonstração de que esse processo conduz à resolução do problema proposto.

O que tornou o livro de Euclides tão memorável foi o facto do seu autor inaugurar um estilo de apresentação dos resultados matemáticos que viria a tornar-se um paradigma característico da nossa ciência. Tentativas anteriores de criação desse estilo parece terem existido, mas Euclides foi tão eficaz e sistemático que as fez esquecer para sempre.

Para compreendermos a situação, podemos fazer uma comparação talvez não muito abusiva e imaginar um conjunto de pessoas que tem o hábito de jogar xadrez. Acontece que algumas dessas pessoas jogam com um tabuleiro dividido em 49 quadrados, enquanto outros utilizam o tabuleiro de 64 quadrados. Por outro lado, para uns os bispos movem-se "na diagonal", para outros as suas possibilidades de movimento são diferentes. E assim sucessivamente.

Se duas dessas pessoas decidem jogar uma partida de xadrez, a primeira coisa que naturalmente tentam fazer é assentar em regras comuns, sem as quais não terão qualquer prazer em jogar um contra o outro.

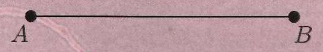
Nos séculos que antecederam a publicação dos *Elementos*, a matemática grega passou por um período de grande actividade criativa. Muitos problemas foram propostos e se tornaram conhecidos nesta época, em particular relativos a construções geométricas. Por exemplo, os três problemas clássicos (duplicação do cubo, quadratura do círculo e trissecção do ângulo) datam desse período. Consideremos por exemplo o problema da trissecção do ângulo:

> Dado um ângulo AÔB, construir um ângulo CÔB tal que AÔB = 3 CÔB.

Como é habitual em matemática, (...) depois de uma exploração prolongada das construções euclidianas, surge um momento em que alguém se interroga: e se ...?

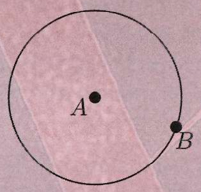
Instrumentos euclidianos: régua não graduada e compasso

Postulado I. Dados dois pontos A e B, é permitido traçar o segmento AB.



Postulado II. Dado o segmento AB, é permitido prolongá-lo obtendo dessa forma uma semirecta ou uma recta.

Postulado III. Dados dois pontos A e B, é permitido traçar a circunferência de centro A e passando por B.



Também neste jogo das construções geométricas sentimos imediatamente a necessidade de ter regras comuns. Dois geómetras gregos que entrassem em competição na descoberta da solução da construção pedida, combinariam naturalmente que instrumentos geométricos poderiam usar, para "ter alguma graça" a sua competição, por assim dizer. No caso da trissecção, por exemplo, se o geómetra A usasse compasso e régua não graduada e o geómetra B apenas uma régua com duas marcas traçadas no seu bordo, B estaria em clara vantagem sobre A (pois sabemos desde os gregos que a régua com as duas marcas chega para esta construção e desde o século XIX que a construção não é possível usando apenas um compasso e uma régua não graduada!).

Pois bem, o que Euclides pretendeu essencialmente nos Elementos, se assimilarmos as suas proposições relativas a construções geométricas a outros tantos desafios num "jogo de construções geométricas", foi estabelecer logo de início as regras do jogo que estava a propor. E depois resolver ele próprio esses desafios obedecendo estritamente a essas regras.

Por essa razão, as construções possíveis de acordo com essas regras passaram a chamar-se construções (geométricas) euclidianas. Mas há evidentemente possibilidade de inventar outros jogos de construções geométricas—por exemplo, Mascheroni[1] inventou um jogo em que apenas podia usar um compasso.

Vejamos alguns pontos deste tema um pouco mais em pormenor.

As escolhas de Euclides[2]

Tratando-se de um jogo de construções geométricas, Euclides escolhe os instrumentos que vai poder usar e, para tornar tudo o mais claro possível, exactamente o que vai ser possível fazer com eles (são as regras do jogo, por assim dizer).

Como é conhecido, o primeiro livro dos *Elementos* de Euclides (que compreende treze) começa com uma lista de 23 *definições*, 5 *postulados*, e 5 *noções comuns*. Seguem-se 48 *proposições*.

Através do enunciado de três postulados que Euclides escolhe três regras do jogo. Ver caixa ao lado, onde uso uma tradução um pouco diferente da habitual para salientar o seu carácter de regras de um jogo.

Note-se que tanto a regra como o compasso têm características especiais. A régua é não graduada, corresponde portanto ao bordo não graduado das nossas réguas habituais. Com uma régua desse tipo, podemos perfeitamente traçar segmentos (postulado I), e prolongar segmentos em semirectas e rectas (postulado II). Quanto ao compasso, é diferente dos nossos compassos habituais, no sentido em que não serve para transportar segmentos. Na realidade, o compasso que podemos usar para estarmos no contexto estrito da geometria euclidiana é um compasso sem memória—o chamado compasso euclidiano—, ou seja, dados dois pontos A e B, posso traçar a circunferência de centro em A e passando por B (de acordo com o postulado III), mas, depois de traçada esta circunferência, e levantado o compasso, ele não mantém a abertura, ou seja, nada nos permite traçar uma circunferência *com o mesmo raio* e de centro, por exemplo, num terceiro ponto C! Temos que ter isto em atenção quando tentamos fazer uma construção euclidiana.

Se o leitor possui o programa *Sketchpad*, no menu lateral esquerdo tem dois icons que correspondem precisamente a estes dois instrumentos.

compasso euclidiano
régua não graduada

Por exemplo, se construo dois pontos A e B, servindo-me da ferramenta ⊙, poderei traçar a circunferência de centro A e passando por B tal como posso traçar a circunferência de centro B e passando por A, está claro. Mas, apenas com esta ferramenta, não poderei traçar mais nenhuma circunferência que tenha garantidamente o mesmo raio!

O exame atento das três primeiras proposições dos *Elementos* que vamos fazer pode ajudar-nos a compreender muito bem ao que corresponde um jogo de construções geométricas, neste caso euclidianas.

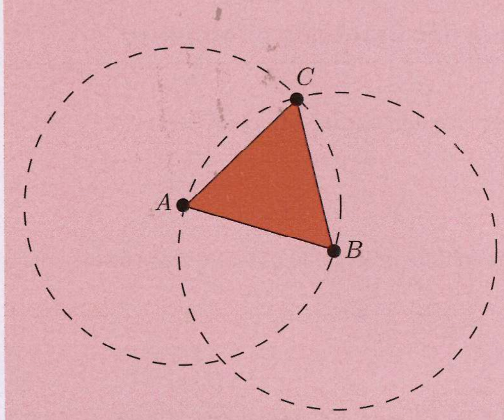


Figura 1.

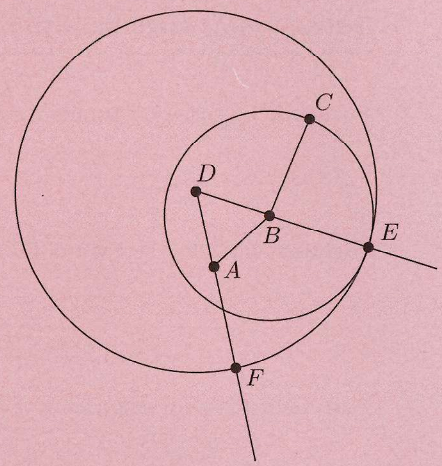


Figura 2.

Ampliando o poder do compasso euclidiano

É um bom exercício imaginar Euclides, depois de ter escrito as 23 *definições* (def.), os 5 *postulados* (post.) e as 5 *noções comuns* (n.c.)[3], preparando-se para escrever o enunciado da primeira proposição. Euclides quer desafiar os seus leitores, e a si próprio, com uma primeira proposta de construção geométrica. Sabe que vai ter que descrever essa construção e depois demonstrar que responde correctamente ao desafio. Mas sabe também que para jogar dentro das regras que a si próprio impôs apenas dispõe dos dois instrumentos indicados, com os quais pode construir segmentos, rectas e circunferências (com as limitações que vimos). Com estes instrumentos não pode construir directamente paralelas ou perpendiculares, e Euclides ainda não descreveu nem demonstrou como se podem fazer tais construções. Que poderá propor?

A primeira proposição dos Elementos é a seguinte:

I.1. *Dado um segmento AB, construir um triângulo equilátero que tenha AB como lado.*

Vejamos passo a passo qual a construção proposta por Euclides e como este vai justificando a (possibilidade) e justeza da sua construção. (Figura 1)

a) Trace-se a circunferência de centro A e passando por B (post. III).
b) Trace-se a circunferência de centro B e passando por A (post. III).
c) Seja C o ponto de intersecção das duas circunferências.
d) Trace-se o segmento AC (post. I).
e) Trace-se o segmento BC (post. I).
f) O segmento AC é igual ao segmento AB (def. 15: *circunferência*).
g) O segmento BC é igual ao segmento AB (def. 15: *circunferência*).
h) O segmento AC é igual ao segmento BC (n.c.1: *duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si*).
i) O triângulo ABC é equilátero (def. 20: *triângulo equilátero*).

O único passo que não está justificado é o passo c), que afirma a existência de um ponto comum às duas circunferências. Na realidade, os pressupostos de Euclides—as regras do jogo das construções euclidianas—não lhe permitiam fazer tal afirmação (apenas *evidente* a partir da figura que acompanha a demonstração ...)[4].

Depois de ter resolvido o primeiro problema de construções geométricas—a construção de um triângulo equilátero—como acabamos de ver, Euclides propõe um novo desafio que resolve de modo muito engenhoso. É a proposição

I.2. *Dados um segmento BC e um ponto A, construir um segmento igual a BC com uma extremidade em A.*

Propomos ao leitor que se sirva da Figura 2 para tentar reconstituir a construção de Euclides e respectiva justificação (poderá recorrer evidentemente também à tradução de David Joyce).

Note-se que agora Euclides, além dos postulados, pode já usar (e usa!) a construção da prop. I.1, referente ao triângulo equilátero.

Vejamos ainda a proposta seguinte de Euclides:

I.3. *Sejam AB e CD dois segmentos (AB maior do que CD). Cortar em AB um segmento igual a CD.*

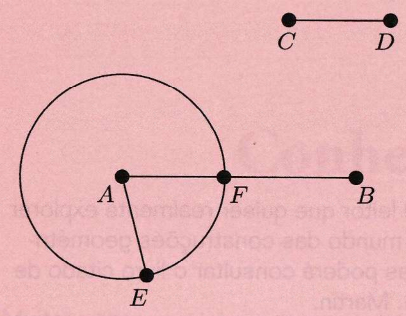


Figura 3.

Também neste caso sugerimos que o leitor tente seguir pelo desenho (Figura 3) a construção e a justificação de Euclides.

Na caixa ao lado, apresentamos um esquema dedutivo simplificado das três primeiras proposições dos *Elementos* de Euclides, que acabamos de examinar (um esquema completo deveria incluir as noções comuns utilizadas e também as definições). Este esquema sugere-nos o seguinte:

- com a primeira proposição (construção do triângulo equilátero) Euclides fica apto a demonstrar a proposição I.2., onde como podemos ver Euclides necessita utilizar os três postulados I, II e III e ainda a única proposição até aí demonstrada;
- claramente, as proposições I.1 e I.2 apenas foram demonstradas de início para conseguir chegar à proposição I.3.

David Joyce salienta que a construção descrita na proposição I.3 é utilizada em todos os livros de geometria dos *Elementos*, e mais vezes do que qualquer outra! Podemos compreender que assim seja, se repararmos que essencialmente o que nos fornece esta proposição é a possibilidade de transportar o segmento CD para uma outra posição (neste caso para *cima* do segmento AB). Isto é, embora Euclides tenha escolhido como instrumento para o seu jogo das construções um *compasso sem memória*, ao fim das primeiras três proposições já adquiriu o direito de usar um *compasso moderno*, ou seja, já pode transportar segmentos, sempre que precisar.

Outros jogos de construções

Como é habitual em matemática, numa tal situação—depois de uma exploração prolongada das construções euclidianas—, surge um momento em que alguém se interroga: e se ...?

Assim, em 1672 o dinamarquês Georg Mohr (no livro *Euclides Danicus*) e em 1797 o italiano L. Mascheroni, sem saber do primeiro (no livro *Geometria del Compasso*) perguntaram a si mesmos *e se tivesse apenas um compasso?* e ambos chegaram à conclusão que

> *Todas as construções feitas com compasso e régua não graduada podem ser feitas apenas com compasso*

Evidentemente que sem régua não podemos *traçar* uma recta ou um segmento, mas compreende-se bem que o que é decisivo e *matemático* nas construções geométricas não é o acto de traçar a recta mas sim o de encontrar os dois pontos que a definem... é isso o que Mohr e Mascheroni querem dizer, está claro.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada no livro de Martin indicado na bibliografia. A título de exemplo, e para não retirar aos leitores o prazer (dos deuses) de encontrar as soluções das propostas da Branca Silveira, vejamos como é possível resolver, *apenas com compasso*, um outro problema:

> *Encontrar a intersecção da recta AB com a circunferência de centro C e passando pelo ponto D.*

Observe a Figura 4 e acompanhe o texto seguinte.

a) A recta AB é dada pelos pontos A e B, e pretende-se encontrar os pontos X e Y de intersecção da recta AB com a circunferência de centro C e passando por D.

b) Construam-se as circunferências de centros em A e B e passando por C, encontrando-se assim o

Postulado I. Dados dois pontos A e B, é permitido traçar o segmento AB.

Postulado III. Dados dois pontos A e B, é permitido traçar a circunferência de centro A e passando por B.

Postulado II. Dado o segmento AB, é permitido prolongá-lo obtendo dessa forma uma semirecta ou uma recta.

Proposição I.1. Dado um segmento AB, construir um triângulo equilátero que tenha AB como lado.

Proposição I.2. Dados um segmento BC e um ponto A, construir um segmento igual a BC com uma extremidade em A.

Proposição I.3. Sejam AB e CD dois segmentos (AB maior do que CD). Cortar em AB um segmento igual a CD.

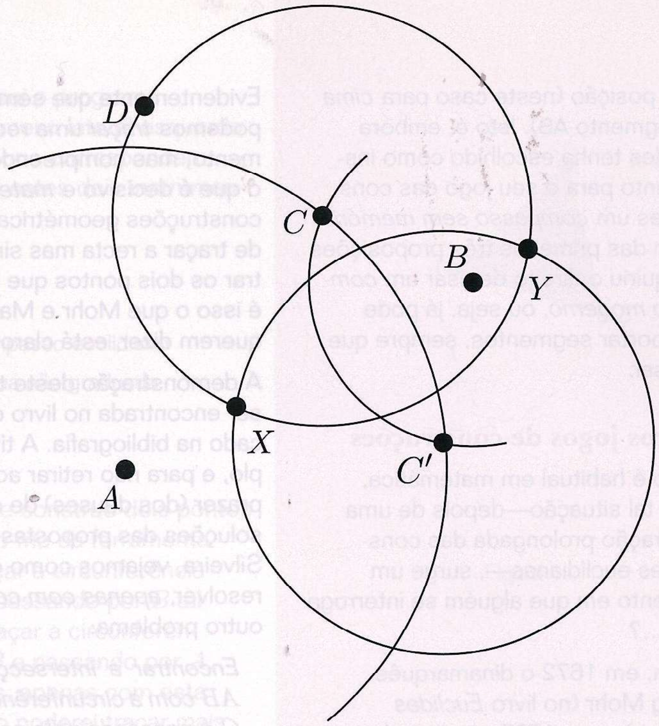


Figura 4.

ponto C' simétrico de C em relação à recta AB.

c) Construa-se agora a circunferência de centro C' e raio igual ao segmento CD, obtendo-se desta forma as intersecções X e Y, como pretendido.

Se o leitor seguiu atentamente este texto, certamente notou duas coisas:

i) Se a recta *AB* passa pelo centro *C*, esta construção não é válida! Ou seja, temos que encontrar uma outra construção para esse caso (veja o livro de Martin referido).

ii) Na alínea c) não usámos o compasso euclidiano, mas o compasso moderno. Nada até agora nos autoriza a fazê-lo, tendo em atenção que a demonstração de Euclides, que nos dá a equivalência entre os dois compassos e de que vimos a demonstração, pressupõe a utilização da régua, o que agora nos é interdito! Bom, é possível provar que, independentemente da presença da régua não graduada, os dois compassos são ainda equivalentes (ver de novo o livro de Martin). Note-se que isto não tira qualquer valor à demonstração apresentada por Euclides, extremamente engenhosa, pois Euclides faz essa demonstração no início do seu tratado, ainda sem praticamente ter demonstrado nada.

E se...?

O leitor já está certamente a adivinhar que os "e se ... ?" não ficaram por aqui ... Com efeito, e naturalmente, surgiu a interrogação:

E se apenas pudermos utilizar a régua não graduada?

Não é razoável esperar que com esta limitação possamos fazer todas as construções da geometria euclidiana! Mas o compasso é um instrumento tão poderoso que Jean Victor Poncelet (1788-1867) pôde afirmar que, se o deixassem usar um compasso uma única vez, e depois a régua não graduada, poderia fazer todas as construções da geometria euclidiana! Como foi Jacob Steiner (1796-1863) que apresentou uma demonstração detalhada dessa afirmação, o teorema tem o nome dos dois;

Teorema de Poncelet-Steiner: *Todas as construções com régua não graduada e compasso podem ser feitas apenas com régua não graduada, se for dada uma circunferência e o seu centro.*

Não ficam por aqui os jogos de construções geométricas. Que construções geométricas poderemos fazer com um compasso de abertura fixa (o chamado *compasso enferrujado*), ou com fósforos, ou com dobragens, ou com uma régua graduada, ou ...

O leitor que quiser realmente explorar o mundo das construções geométricas poderá consultar o livro citado de G. Martin.

Os ficheiros de Sketchpad referentes a este artigo encontram-se no endereço: http://www.apm.pt/din-revista/listageral.html

Notas

1 Encontra facilmente no endereço: http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html a biografia de qualquer matemático.

2 Existem boas traduções dos *Elementos* de Euclides em inglês e em francês, e uma tradução parcial em português (ver bibliografia). Recomendo a utilização de uma versão *online* (em inglês e em catalão) muito interessante e informativa, com figuras interactivas, da autoria de David Joyce, da Universidade de Clark.

3 Recorde essas definições, postulados e noções comuns na versão *online* de David Joyce, por exemplo.

4 David Hilbert resolve esta questão na revisão da axiomática de Euclides feita nos *Fundamentos da Geometria* (ver bibliografia).

Bibliografia

Livros

Euclid. The Elements. 3 volumes. Tradução de Sir Thomas Heath. New York: Dover Publications, Inc, 1956.

Hilbert, David. *Fundamentos da Geometria*. Traduzido por Maria Pilar Ribeiro e J. Silva Paulo. Lisboa: Instituto para a Alta Cultura, 1952.

Martin, George E. *Geometric Constructions*. New York: Springer-Verlag, 1998.

Online

Euclides. *The Elements* (em inglês): http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

Euclides. *Elements* (em catalão): http://www.xtec.es/~jdomen28/indexeuclides.htm

Euclides. *Elementos* (tradução parcial em português) http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/elem.html

Eduardo Veloso