

A modelação matemática é considerada um processo com origem num fragmento do mundo real e que culmina na construção de um modelo matemático dessa realidade (...) identificada uma determinada situação é muitas vezes necessário simplificar alguns aspectos de modo a produzir um modelo para a sala de aula que seja interessante e compreensível para os alunos

Porque sobem os corvos a 5 metros? Uma experiência de sala de aula

Adelina Precatado e Maria da Paz Martins

Introdução

A modelação matemática é considerada um processo com origem num fragmento do mundo real e que culmina na construção de um modelo matemático dessa realidade. Sendo o processo de modelação matemático um dos itens que constitui o tema *Lógica e Raciocínio Matemático* do programa do ensino secundário é necessário adaptá-lo ao contexto educativo. Nesta perspectiva, identificada uma determinada situação é muitas vezes necessário simplificar alguns aspectos de modo a produzir um modelo para a sala de aula que seja interessante e compreensível para os alunos e que permita utilizar determinados conteúdos matemáticos.

É neste contexto que decidimos propor, aos nossos alunos de 11º ano (duas turmas do 1º agrupamento e uma do 3º), uma das tarefas existentes no site do NCTM (<http://illuminations.nctm.org>) que utiliza

funções racionais para investigar o comportamento dos corvos de uma determinada região. A descrição e análise que se apresenta da experiência visa dar a conhecer uma tarefa que proporciona a vivência de diversas fases do processo de modelação com o auxílio da tecnologia.

Descrição da experiência

Na primeira aula—de turno—foi apresentada a seguinte situação: *um investigador observou que os corvos de determinada região se alimentam de búzios e que para os partirem os erguem no ar até uma altura de cerca de 5 metros e os deixam cair, repetindo a operação até os búzios partirem. Porque sobem os corvos até 5 metros?*

Apresentada a situação, os alunos trabalharam em grupo (dois ou três alunos), no computador, procurando

responder à primeira questão colocada: qual dos trajectos é melhor, A ou B? (Ver Figura 1)

O vídeo inicial que apresenta os corvos a deixarem cair os búzios sobre as rochas, transmitiu algum realismo à situação e permitiu o confronto com as hipóteses colocadas pelos alunos acerca do melhor trajecto.

Seguidamente foram convidados a formular conjecturas tendo em atenção as seguintes questões: (a) que factores influenciam a altura a que os corvos sobem para deixarem cair os búzios? (b) haverá um número mínimo de quedas para partir um búzio? (c) e haverá uma altura máxima ou mínima para deixar cair um búzio? (d) que relação existirá entre o número de vezes que é necessário deixar cair um búzio e a altura a que o corvo sobe? Após a discussão, em grupo, esboçaram um gráfico correspondente às suposições feitas.

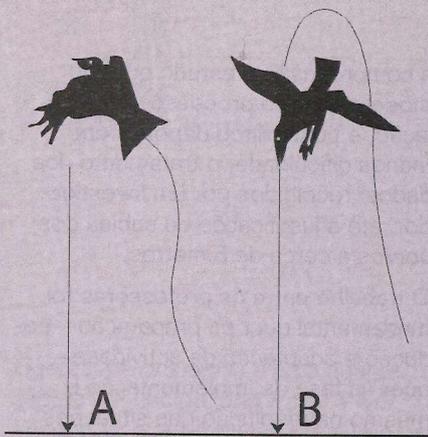


Figura 1.

Neste contexto, estavam criadas as condições para ir um pouco mais além na investigação e tentar perceber se o modo como os corvos deixam cair os búzios minimiza o seu trabalho, tendo em conta que esse trabalho depende quer da altura da queda do búzio quer do número de quedas ou seja do número de vezes que o corvo deixa cair o búzio e volta a apanhá-lo. Na impossibilidade de fazer uma simulação com os búzios, como fez o investigador Reto Zach, os alunos realizaram uma experiência semelhante mas com amendoins.

Os alunos deixaram cair amendoins descascados de diversas alturas e registaram o número de quedas necessárias para os partir (ver ficha em actividade para a sala de aula). Juntaram os dados obtidos por cada um dos grupos permitindo assim que a experiência fosse mais significativa e também a construção de uma tabela única para toda a turma. Os dados de cada um dos grupos foram introduzidos no computador que de imediato apresentou as médias e o desvio padrão do número de quedas para cada uma das alturas.

A título de exemplo deixamos os resultados obtidos numa das turmas (ver Tabela 1).

Na 2ª aula foi distribuída aos alunos uma ficha que possibilitou a continuação da tarefa sem o uso do computador. A partir daqui os dados foram tratados com a calculadora gráfica.

Analisados os dados dos amendoins, os alunos concluíram que a função era decrescente e que devia ter uma assíntota horizontal e outra vertical, o que conduziu à hipótese de considerar uma função racional para modelar a situação.

Retomando algumas das questões iniciais, nomeadamente as relativas ao número mínimo de quedas necessárias para partir um amendoim e a altura mínima para que este se parta, foi possível perceber que uma função do tipo

$$N = a + \frac{b}{h - c}$$

seria aceitável. Como para partir um amendoim é necessário pelo menos uma queda tomou-se para a o valor 1. Depois os alunos procuraram o valor dos outros parâmetros: b e c .

A ficha sugere, para a descoberta de b e c a utilização de um processo de regressão linear, depois de levar os alunos a reflectirem sobre a equivalência das seguintes expressões:

$$N = 1 + \frac{b}{h - c}$$

e

$$(N - 1)^{-1} = \frac{h - c}{b}$$

A última equação estabelece uma relação linear entre $(N - 1)^{-1}$ e h . A equação de regressão linear que

relaciona h e $(N - 1)^{-1}$ foi obtida na calculadora, introduzindo os dados relativos a $(N - 1)^{-1}$ e a h e, depois, foi resolvida a equação em ordem a N .

A equação encontrada pela turma já referida foi:

$$N = 1 + \frac{126,8}{1 - 10,3}$$

em que N é o número médio de quedas e h a altura em centímetros a que se deixa cair o amendoim.

Analisados os dados dos amendoins, estavam criadas as condições para tratar, da mesma forma, os dados estatísticos relativos aos búzios, recolhidos pelo investigador e fornecidos aos alunos na ficha de trabalho. (Ver Tabela 2.)

O modelo encontrado foi

$$N = 1 + \frac{20,41}{h - 0,84}$$

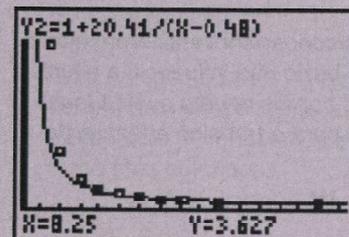


Gráfico 1.

No final desta aula cada um dos grupos entregou um pequeno relato do trabalho desenvolvido e das conclusões que depois lhes foi devolvido com algumas correcções e ou comentários. O estudo foi continuado em casa com auxílio da ficha e foi pedido aos alunos um relatório individual.

Os alunos procuraram responder à questão inicial, tendo em conta que

Tabela 1.

Alturas (cm)	15	20	25	30	35	40	50	60
Média do número de quedas	22,25	17,75	7,25	7	7,5	6,5	3,88	3,5
Desvio padrão	6,99	5,39	3,58	3,34	2,73	3,59	2,48	0,93

Tabela 2.

	Altura da queda (metros)									
	1,5	2	3	4	5	6	7	8	10	15
Nº médio de quedas	56	20	10,2	7,6	6	5	4,3	3,8	3,1	2,5

o trabalho do corvo para partir um búzio depende do seu peso e do peso do búzio, da altura da queda e do número de vezes que é necessário deixar cair o búzio. Supondo que o peso do corvo e do búzio é sensivelmente constante e admitindo que é 1 unidade, encontraram para o trabalho (W):

$$W = h \times N = h \left(1 + \frac{20,41}{h - 0,84} \right).$$

O estudo desta função permitiu concluir que o trabalho é mínimo quando a altura é de cerca de 5 metros, tal como o gráfico 2 apresenta.

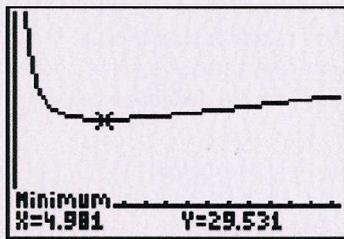


Gráfico 2.

Também curioso foi verificarem que o peso do búzio não influencia a altura a que os corvos devem subir. Considerando para o trabalho a família de funções

$$W = p \times h \times N = p \times h \left(1 + \frac{20,41}{h - 0,84} \right)$$

e atribuindo vários valores (sugeridos na ficha) ao peso do búzio os alunos constataram que o valor da altura para o qual o trabalho era mínimo se mantinha constante. Na discussão deste aspecto, em algumas turmas, nomeadamente nas do primeiro agrupamento, evidenciou-se a relação de proporcionalidade directa entre W e p traduzida na equação e que justifica que se mantenha a altura para a qual o trabalho é mínimo. (Gráfico 3)

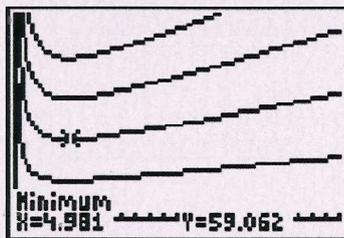


Gráfico 3.

Durante o período dado para a conclusão da tarefa e elaboração do relatório houve necessidade de introduzir na aula pequenos momentos para discutir aspectos relacionados quer com o trabalho de modelação quer com a clarificação do que se pretendia—ou exigia—no relatório.

Embora estes alunos já tivessem realizado relatórios de outras actividades, esta levantou algumas dúvidas sobre o que era exigido. Depois de alguma discussão entre nós (professoras) decidimos clarificar as orientações sobre o conteúdo dos relatórios:

- a descrição da experiência com os amendoins e apresentação do modelo;
- a resposta à questão *Porque sobem os corvos a 5 metros?*, de forma fundamentada, o que incluiria obrigatoriamente o estudo da função do trabalho no contexto do problema.

Conclusões/Reflexão

A apresentação da situação com recurso ao computador (INTERNET), nomeadamente o vídeo inicial contribuiu para criar um clima de mobilização dos alunos transportando-os para o real.

A discussão da primeira questão colocada aos alunos acerca dos trajectos possíveis entusiasmou sobretudo os alunos do primeiro agrupamento que quiseram estudar em qual dos trajectos de voo o búzio alcançava maior velocidade. A colaboração com a professora de Físico-Química revelou-se fundamental, nesta altura, para fazer o estudo da velocidade, nos dois trajectos, com base nas leis do movimento. No final percebemos que a diferença de velocidade não era muito significativa e que, por outro lado, o trajecto parecia estar mais relacionado com o facto de os corvos avistarem ou não o lugar onde caíam os búzios.

A experiência dos amendoins foi, quanto a nós, extremamente importante porque ajudou a envolver os alunos na tarefa, contribuiu para

a compreensão e estudo quer do modelo quer do processo de modelação, e possibilitou depois, com menos dificuldade, o tratamento dos dados recolhidos por um investigador até à justificação da subida dos corvos a cerca de 5 metros.

O trabalho entre as professoras foi fundamental quer na preparação—tradução e adaptação da actividade—quer na fase de implementação e mesmo na resolução das situações que entretanto foram surgindo.

A ficha apresentada aos alunos para além da actividade de modelação coloca questões relacionadas com o estudo das funções o que a torna bastante extensa. Desde o início discutimos esta questão embora tivéssemos optado por não a simplificar por considerarmos ser uma oportunidade para consolidar o estudo das funções racionais. Pareceu-nos, no entanto, que para alguns alunos ela foi demasiado extensa, facto que contribuiu para as dúvidas surgidas acerca do que incluir no relatório. Tivemos que alargar um pouco o prazo inicialmente previsto para a entrega dos relatórios individuais.

Os alunos em geral gostaram e empenharam-se no desenvolvimento deste pequeno projecto, quer nas aulas quer no trabalho em casa. Alguns sentiram dificuldades que foram sendo ultrapassadas com o professor ou nos momentos colectivos que introduzimos nas aulas para discussão da tarefa.

Muitos alunos referiram espontaneamente, no momento de auto-avaliação, esta actividade como uma das que mais gostaram de desenvolver durante o ano e escolheram-na para ser apresentada à equipa de avaliação internacional do Projecto Ciência Viva que visitou a escola e também no V Forum Ciência Viva.

Adelina Precatado
Maria da Paz Martins
Escola Secundária de Camões