José Paulo Viana

O problema deste número

Cubinhos e tintas de três cores

Com uma certa quantidade de cubinhos, todos iguais, fiz um cubo grande sem espaços vazios no interior. Depois pintei de azul toda a superfície exterior do cubo grande.

A seguir, rearrumei esses cubinhos de modo a formar novo cubo grande mas sem que qualquer face azul ficasse visível e pintei de vermelho toda a superfície exterior.

Por fim, voltei a rearrumar os mesmos cubinhos de modo que nenhuma face já pintada ficasse à vista e pintei de amarelo toda a superfície exterior do novo cubo grande.

Verifiquei então que todas as faces dos cubinhos estavam pintadas.

Quantos cubinhos ficaram com apenas duas cores?

(Respostas até 30 de Junho)

Grupos equivalentes

O problema correspondente ao número 70 de *Educação e Matemáica* foi o seguinte:

A Carolina anda toda entusiasmada com a escola, com os números e com as operações.

Escreveu os números 1, 2, 3, … até um certo N e depois separou-os em dois grupos, de tal modo que a soma dos elementos de cada grupo fosse igual. Reparou que, para certos valores de N, isso era possível mas que para outros já não era.

Quais são os valores de N para os quais consegue o seu objectivo?

E se ela quiser dividir os números em 3 grupos?

E em 4? E...?

Chegaram-nos 7 respostas: Armando Fernandes (Aveiro), Edgar Martins (Queluz), Inês Fartaria (Chamusca), Isabel Viana (Porto), João Maria Oliveira (Cartaxo),Judite Lima (Vouzela), Pedrosa Santos (Queluz).

Pensamos que o reduzido número de respostas se deva à dificuldade em generalizar este problema. Os leitores que mais longe avançaram na investigação foram a Isabel, o Armando e o Edgar.

Seja G o número de grupos em que queremos dividir os primeiros N números naturais.

Comecemos pela divisão em dois grupos (G=2).

Algumas pequenas experiências levam-nos a descobrir os casos em que isso é possível:

N=3 $\quad 1+2 = 3$

N=4 $\quad 1+4 = 2+3$

N=7 $\quad 1+6+7 = 2+3+4+5$

N=8 $\quad 3+7+8 = 1+2+4+5+6$

…

Os valores possíveis para N são:

3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, …

ou seja, N terá de ser da forma:

$4k$ ou $4k$–1 (com $k \in \mathbb{N}$)

A justificação para isto pode ser feita a partir da fórmula da soma dos primeiros N números naturais:

$$S = \frac{N(N+1)}{2}$$

O total S tem de ser divisível por 2, logo ou N ou N+1 têm de ser divisíveis por 4.

Passemos agora ao caso de três grupos (G=3).

Fazendo algumas experiências, vemos que há solução para:

N=5 $\quad 1+4 = 2+3 = 5$

N=6 $\quad 1+6 = 2+5 = 3+4$

N=8 $\quad 1+3+8 = 2+4+6 = 5+7$

N=9 $\quad 1+2+3+9 = 4+5+6 = 7+8$

…

Os valores possíveis para N são:

5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, …

ou seja, N terá de ser da forma:

$3k$+2 ou $3k$+3 (com $k \in \mathbb{N}$)

Como o total S tem de ser divisível por 3, N ou N+1 terão de ser divisíveis também por 3 (Nota: N igual a 2 ou 3 não serve porque N seria maior que o valor de cada parcela).

Vejamos o caso de 4 grupos (G=4).

Os valores possíveis para N são:

7, 8, 15, 16, 2, 24, …

ou seja, N terá de ser da forma:

$8k$ ou $8k$–1 (com $k \in \mathbb{N}$)

porque S tem de ser divisível por 4, logo N ou N+1 terão de ser divisíveis por 8.

Passemos a 5 grupos (G=5).

Os valores possíveis para N são:

9, 10, 14, 15, 19, 20, …

ou seja, N terá de ser da forma:

$5k$+4 ou $5k$+5 (com $k \in \mathbb{N}$)

porque o total S tem de ser divisível por 5, e portanto N ou N+1 terão de ser divisíveis também por 5.

Vejamos agora 6 grupos (G=6).

Já estamos a prever que os múltiplos de 12 ou os múltiplos de 12 menos 1 sejam solução:

11, 12, 23, 24, 35, 36 …

Mas, oh surpresa!, há mais soluções para N igual a:

$8, 15, 20, 27, 32, 39, 44, \ldots$

Porque surgem estas soluções? Reparemos na fórmula que dá S. Se N ou $N+1$ forem múltiplos de 6, surge o primeiro grupo de soluções. Mas S a dividir por G também dá um número inteiro nos casos em que N e $N+1$ são, um deles múltiplo de 4 e o outro múltiplo de 3. Por exemplo:

$N=8$ e $N+1=9$

$N=15$ e $N+1=16$

Então, as soluções são da forma:

$12k-1$, $12k$, $12k-4$ ou $12k+3$ (com $k \in \mathbb{N}$)

Para $G=7$:

$7k+6$ ou $7k+7$ (com $k \in \mathbb{N}$).

Para $G=8$:

$16k$ ou $16k-1$ (com $k \in \mathbb{N}$).

Para $G=9$:

$9k+8$ ou $9k+9$ (com $k \in \mathbb{N}$).

Para $G=10$:

$20k$, $20k-1$, $20k+4$ ou $20k+15$ (com $k \in \mathbb{N}$).

Enfim, não é nada fácil generalizar. A única certeza, como diz o Edgar, é que se G for primo as soluções são da forma:

Gk ou $Gk-1$ (com $k \in \mathbb{N}$ e maior que 2).

Materiais para a aula de Matemática

Áreas e volumes

Esta tarefa nasceu no curso Ensino da Geometria e das Funções no Secundário—Perspectivas dos Novos Programas, quando a Rita Bastos pegando num tetraedro e num octaedro de arestas iguais lançou a questão: Que relação existe entre o volume do tetraedro e o do octaedro? e em seguida, deitando mão ao seu baú de sólidos, construiu o puzle que permitiu chegar à solução.

Pareceu-me que seria uma excelente ideia a desenvolver na sala de aula para abordar *Descoberta de relações métricas entre figuras* e para isso elaborei esta tarefa.

Reflecti depois sobre ela com os restantes elementos da equipa e vimos que ela envolve três fases:

1ª. Construção, visualização e identificação de sólidos obedecendo a determinados requisitos.

2ª. Determinação da razão entre o volume do octaedro e tetraedro em questão.

3ª. Reflexão sobre o trabalho desenvolvido conducente à generalização, a figuras geométricas semelhantes do plano e do espaço das conclusões tiradas.

Na 1ª fase o aluno terá de descobrir e identificar o sólido em questão. Nesta tentativa de descoberta terá que pesquisar, explorar e alvitrar uma resposta que é convidado a validar podendo necessitar de a reformular. Parece-nos tratar-se de um bom exercício de visualização espacial que requer o conhecimento dos sólidos platónicos e suas características bem como o estabelecimento de relações entre eles.

Na 2ª fase o objectivo é trabalhar áreas e volumes por composição/decomposição de figuras e recordar relações numéricas entre comprimentos, áreas e volumes.

A 3ª fase conduz ao desenvolvimento do espírito indutivo permitindo a generalização de relações métricas.

Esta tarefa já foi utilizada em turmas do 10º ano a quando do estudo do Tema I—Geometria no Plano e no Espaço I, usando o material Polydron e tendo o cuidado de distribuir cada parte após a exploração da anterior. A exploração da tarefa foi completada, ao fazer a síntese das conclusões tiradas, levando os alunos a reflectir sobre a diferença entre volume e forma, comparando o octaedro com os quatro tetraedros e vendo que embora o volume seja o mesmo, por mais que tentemos encaixar os tetraedros não é com eles possível construir o octaedro.

Manuela Ribeiro
Isaura Nogueira
Ana Campos
Escola Secundária
Cidade Universitária, Lisboa