Padrão da Tabuada

Paulo J. Matos

> A Matemática é assim, existe para muitas vezes nos deixar boquiabertos e nos pôr a pensar de maneira mais abstracta. (...) curiosidades matemáticas como esta são coisas de que sempre gostei e, apesar de já ter lido vários livros (...) nunca ouvi falar sobre este interessante padrão.

É conhecido um jogo que se faz que diz o seguinte:

> Imagine um número de 1 a 9 inclusivé e multiplique por 9. Se o número tiver mais de 2 algarismos some-os. Desse algarismo resultante da soma ou o próprio 9 caso o algarismo inicial seja 1 (9x1=9) subtraia 5. (...)

O jogo continua, no entanto a parte importante já foi referida. E este jogo é engraçado porque o resultado desta parte será sempre 4 o que com a continuação do jogo o seu resultado é sempre igual.

Mas esquecendo o jogo e lembrando apenas a parte em que o resultado é sempre 4 decidi que queria saber e de alguma maneira provar porque é que ele é sempre 4. Escrevi a tabuada do 9 e o resultado saltou à vista:

9 x 1 = 09 –> 0 + 9 = 9
9 x 2 = 18 –> 1 + 8 = 9
9 x 3 = 27 –> 2 + 7 = 9
9 x 4 = 36 –> 3 + 6 = 9
9 x 5 = 45 –> 4 + 5 = 9
9 x 6 = 54 –> 5 + 4 = 9
9 x 7 = 63 –> 6 + 3 = 9
9 x 8 = 72 –> 7 + 2 = 9
9 x 9 = 81 –> 8 + 1 = 9

Daqui vê-se logo no que se baseia o jogo. Este 9 parece um número interessante. Enquanto que o primeiro algarismo cresce, o outro decresce simetricamente, digamos, o que origina um resultado ser sempre 9.

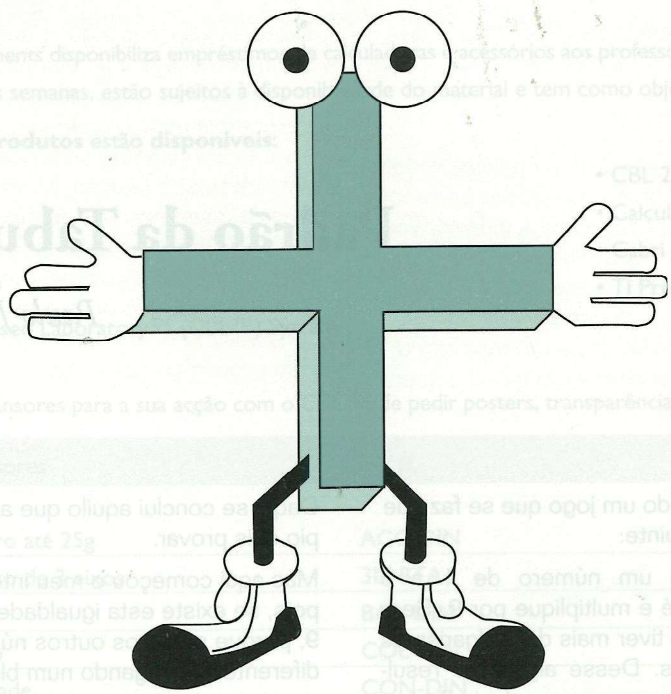
Daqui se conclui aquilo que ao princípio quis provar.

Mas aqui começou o meu interesse pois, se existe esta igualdade com o 9, porque serão os outros números diferentes. E pegando num bloco fiz exactamente a mesma coisa para o resto dos números. (Na realidade fiz a tabuada com o 10 incluído, mas visto que verifiquei que é irrelevante para este caso apresento apenas até ao 9 inclusivé.

8 x 1 = 08 –> 0 + 8 = 8
8 x 2 = 16 –> 1 + 6 = 7
8 x 3 = 24 –> 2 + 4 = 6
8 x 4 = 32 –> 3 + 2 = 5
8 x 5 = 40 –> 4 + 0 = 4
8 x 6 = 48 –> 4 + 8 = 12 –> 1 + 2 = 3
8 x 7 = 56 –> 5 + 6 = 11 –> 1 + = 2
8 x 8 = 64 –> 6 + 4 = 10 –> 1 + 0 = 1
8 x 9 = 72 –> 7 + 2 = 9

Apesar do pequeno problema que tive quando cheguei a 6 rapidamente o resolvi somando os números de novo o que resultou naquilo que queria. Nota-se que existe uma contagem decrescente dos números com excepção do 9 que está no final (mais à frente vamos verificar que isto não ocorre apenas na tabuada do 8). No entanto tudo se compõe se colocarmos o 9 no início da tabuada ficando com uma contagem decrescente perfeita.

Quanto aos algarismos os segundos diminuem de par em par e quando chegam a 0 recomeça de novo.



Quanto aos primeiros eles aumentam existindo apenas uma repetição no 4. No entanto não achei que a análise dos algarismos seja relevante para a possível conclusão final o que me leva a deixar de fazer a mesma coisa para os seguintes.

7 x 1 07 -> 0 + 7 = 7
7 x 2 = 14 -> 1 + 4 = 5
7 x 3 = 21 -> 2 + 1 = 3
7 x 4 = 28 -> 2 + 8 = 10 -> 1 + 0 = 1
7 x 5 = 35 -> 3 + 5 = 8
7 x 6 = 42 -> 4 + 2 = 6
7 x 7 = 49 -> 4 + 9 = 13 -> 1 + 3 = 4
7 x 8 = 56 -> 5 + 6 = 11 -> 1 + 1 = 2
7 x 9 = 63 -> 6 + 3 = 9

Nesta última conhecemos também imediatamente um padrão. Inicia-se uma contagem decrescente de impares e chegando ao 1, inicia-se uma contagem decrescente de pares. No entanto cá nos aparece de novo o 9 que se passarmos para o princípio tudo continua a bater certo pois ao invés de uma contagem decrescente iniciada em 7 temos uma iniciada em 9.

Continuando …

6 x 1 = 06 -> 0 + 6 = 6
6 x 2 = 12 -> 1 + 2 = 3
6 x 3 = 18 -> 1 + 8 = 9
6 x 4 = 24 -> 2 + 4 = 6
6 x 5 = 30 -> 3 + 0 = 3
6 x 6 = 36 -> 3 + 6 = 9
6 x 7 = 42 -> 4 + 2 = 6
6 x 8 = 48 -> 4 + 8 = 12 -> 1 + 2 = 3
6 x 9 = 54 -> 5 + 4 = 9

Bom, nota-se aqui facilmente três distintas repetições da sequência 6–3–9. Se no entanto passarmos o último para primeiro temos a sequência 9–6–3. Esperemos para ver o que se passa nos seguintes.

5 x 1 = 05 -> 0 + 5 = 5
5 x 2 = 10 -> 1 + 0 = 1
5 x 3 = 15 -> 1 + 5 = 6
5 x 4 = 20 -> 2 + 0 = 2
5 x 5 = 25 -> 2 + 5 = 7
5 x 6 = 30 -> 3 + 0 = 3
5 x 7 = 35 -> 3 + 5 = 8
5 x 8 = 40 -> 4 + 0 = 4
5 x 9 = 45 -> 4 + 5 = 9

Nota-se que não sobressai nada à primeira vista como nos anteriores no entanto com um olhar pormenorizado vê-se que:

5 x 1 = 05 -> 0 + 5 = 5
5 x 2 = 10 -> 1 + 0 = 1
5 x 3 = 15 -> 1 + 5 = 6
5 x 4 = 20 -> 2 + 0 = 2
5 x 5 = 25 -> 2 + 5 = 7
5 x 6 = 30 -> 3 + 0 = 3
5 x 7 = 35 -> 3 + 5 = 8
5 x 8 = 40 -> 4 + 0 = 4
5 x 9 = 45 -> 4 + 5 = 9

Isto sim, já faz notar o que se passa aqui. Temos vindo a ter até aqui vários padrões diferentes e no entanto padrões que não devem ser apenas coincidência mas acabemos então visto que já aqui chegámos mas não sem antes rever o que se passou anteriormente. No 9 tivemos uma igualdade de 9, no 8 uma contagem decrescente, no 7 uma contagem decrescente ímpar seguida de uma contagem decrescente par, no 6 uma repetição de uma sequência e neste último uma estranha junção de duas sequências intercaladas entre si. Continuemos então para saber se existem novas ideias de padrões da matemática …

4 x 1 = 04 -> 0 + 4 = 4
4 x 2 = 08 -> 0 + 8 = 8
4 x 3 = 12 -> 1 + 2 = 3
4 x 4 = 16 -> 1 + 6 = 7
4 x 5 = 20 -> 2 + 0 = 2
4 x 6 = 24 -> 2 + 4 = 6
4 x 7 = 28 -> 2 + 8 = 10 -> 1 + 0 = 1
4 x 8 = 32 -> 3 + 2 = 5
4 x 9 = 36 -> 3 + 6 = 9

Notamos aqui qualquer coisa parecida com o que aconteceu com o anterior, no entanto, temos o último que de novo estraga o padrão todo. Acontece que se mais uma vez passarmos o último para primeiro tudo parece funcionar correctamente.

3 x 1 = 03 –> 0 + 3 = 3
3 x 2 = 06 –> 0 + 6 = 6
3 x 3 = 09 –> 0 + 9 = 9
3 x 4 = 12 –> 1 + 2 = 3
3 x 5 = 15 –> 1 + 5 = 6
3 x 6 = 18 –> 1 + 8 = 9
3 x 7 = 21 –> 2 + 1 = 3
3 x 8 = 24 –> 2 + 4 = 6
3 x 9 = 27 –> 2 + 7 = 9

Isto agora é que se começa a tornar, pelo menos para mim, bastante interessante e engraçado pois com isto da tabuada que aprendi na 1ª classe, 12 anos depois verifico que existe um padrão nisto tudo. O problema é porquê mas isto ainda não acabou e também podemos verificar que este padrão é uma sequência 3–6–9, parecida com a do 6.

2 x 1 = 02 –> 0 + 2 = 2
2 x 2 = 04 –> 0 + 4 = 4
2 x 3 = 06 –> 0 + 6 = 6
2 x 4 = 08 –> 0 + 8 = 8
2 x 5 = 10 –> 1 + 0 = 1
2 x 6 = 12 –> 1 + 2 = 3
2 x 7 = 14 –> 1 + 4 = 5
2 x 8 = 16 –> 1 + 6 = 7
2 x 9 = 18 –> 1 + 8 = 9

Ora cá temos mais um semelhante ao do 7. Crescente par e depois crescente ímpar. No 7 era parecido sendo como já foi dito anteriormente decrescente ímpar, decrescente par.

1 x 1 = 01 –> 0 + 1 = 1
1 x 2 = 02 –> 0 + 2 = 2
1 x 3 = 03 –> 0 + 3 = 3
1 x 4 = 04 –> 0 + 4 = 4
1 x 5 = 05 –> 0 + 5 = 5
1 x 6 = 06 –> 0 + 6 = 6
1 x 7 = 07 –> 0 + 7 = 7
1 x 8 = 08 –> 0 + 8 = 8
1 x 9 = 09 –> 0 + 9 = 9

Este é trivial mas não deixei de o escrever por uma questão de coerência. E esta contagem crescente será semelhante ao padrão do 8 que é uma contagem decrescente.

Neste ponto do assunto surgiu um terrível problema e pergunta na minha cabeça que foi o que se passaria exactamente com o 9. Passado uns momentos lembrei-me do número que faz parceria com o 9.

0 x 1 = 0
0 x 2 = 0
0 x 3 = 0
0 x 4 = 0
0 x 5 = 0
0 x 6 = 0
0 x 7 = 0
0 x 8 = 0
0 x 9 = 0

Pois é, tão simples que não me lembrou a mim. No entanto completámos e chegámos ao final da tabuada, mas não do assunto.

Parece que temos aqui uma certa simetria senão vejamos:

0<–>9

Igualdade a 0 e a 9

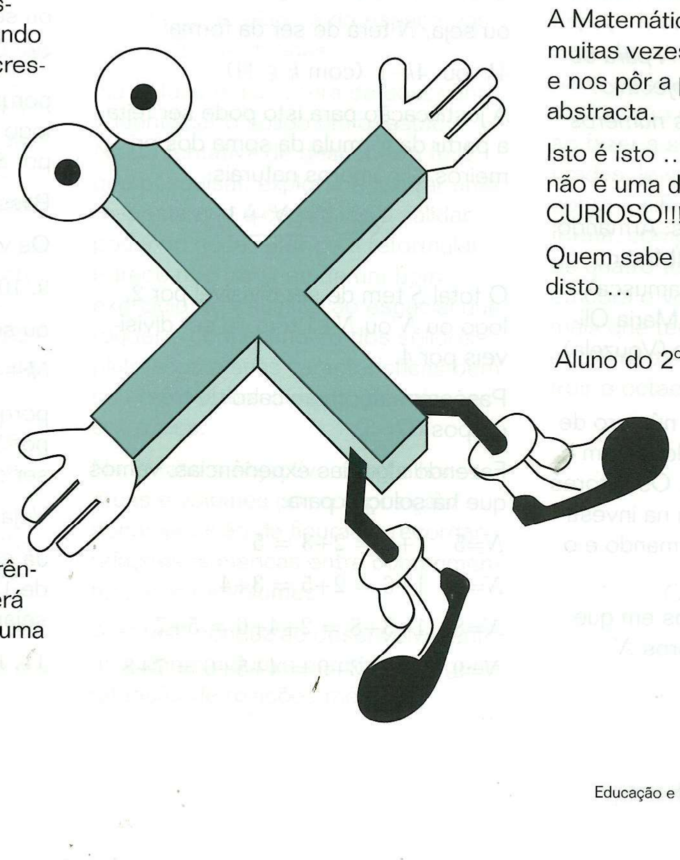
1<–>8

Contagem crescente e decrescente

2<–>7

Contagens parciais crescentes e decrescentes pares e ímpares

3<–>6



Repetições de sequências 3–6–9 e 6–3–9

Verifica-se que em ambas as sequências a soma dos 2 primeiros dígitos da sequência (6 e 3) é igual ao 3º (9)

4<–>5

Sequências intercaladas de números pares e ímpares em contagem crescente e decrescente

Agora pergunto-me eu, o que é que se passa? É isto fruto do acaso ou existe um teorema provado dezenas de anos e do qual nunca ouvi falar? Por acaso curiosidades matemáticas como esta são coisas de que sempre gostei e, apesar de já ter lido vários livros como *The book of numbers*, *The joy of Mathematics—Vol 1 e 2*, *Mathematical Paradoxes* e outros, nunca ouvi falar sobre este interessante padrão.

O que é o número 9 no meio disto tudo? Parece ser tão importante como o número 0. Vejamos na parte acima que são números que somados dão 9 e logo fazem parte da sua tabuada (por exemplo, 4<–>5, 4+5=9, 9x5=45).

Resumindo e baralhando digamos que isto não é senão mas uma daquelas coisas da Matemática que nos deixa a pensar como é que uma coisa destas poderá ser explicada. Bom, provavelmente não pode, quem sabe?

A Matemática é assim, existe para muitas vezes nos deixar boquiabertos e nos pôr a pensar de maneira mais abstracta.

Isto é isto ... Não é uma prova, não é uma demonstração mas é CURIOSO!!!

Quem sabe o que está por detrás disto ...

Paulo J. Matos
Aluno do 2º ano de Eng. Informática e de Computadores do IST