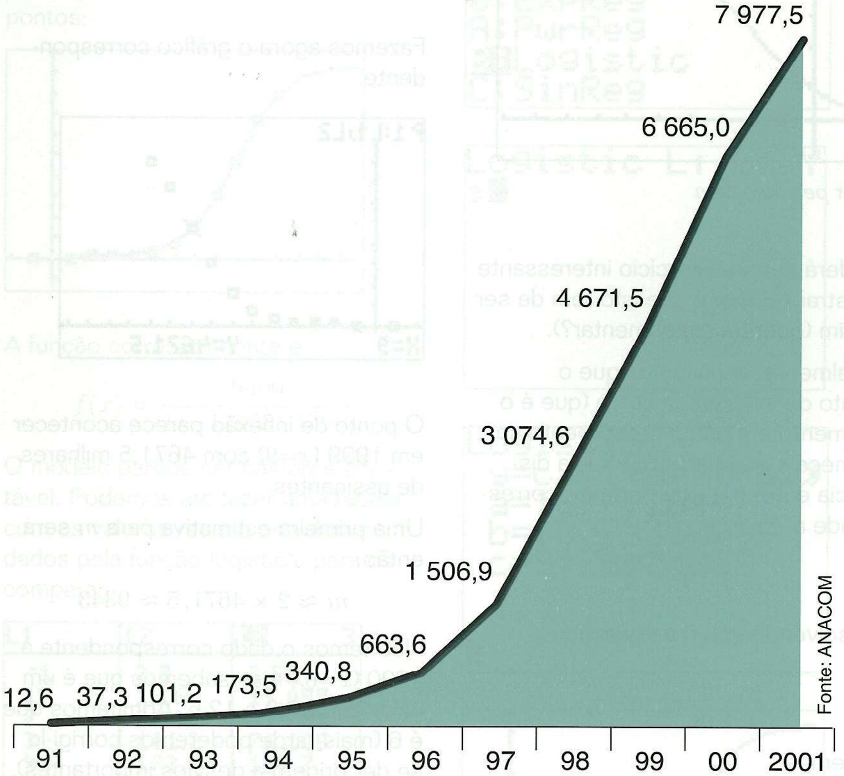
Telemóveis e Matemática

José Paulo Viana



Rumo à maturidade
Número de assinantes de telemóveis em Portugal (milhares)

Lembram-se de quando apareceram os telemóveis? Sim, aqueles aparelhos enormes que meia dúzia de pessoas tinha e gostava de exibir!

Bem, os tempos passaram e agora quase todos o têm e já quase ninguém precisa de o exibir. Foi ao ler o jornal *Público* de 23 de Março de 2001 que tomei consciência que tinham passado mais de 10 anos.

Quando estava a olhar para o gráfico que lá estava, com a evolução do número de assinantes em Portugal, apercebi-me (com algum entusiasmo, diga-se de passagem) que, pelo menos à primeira vista, aquele crescimento se parecia bastante com o descrito por uma função que bem conhecemos. Trata-se da função logística, que costumamos usar com os alunos do 12º ano.

Se assim fosse, haveria um bom modelo matemático para descrever aquela evolução. Foi o que resolvi investigar.

A função logística

A função logística é do tipo

$$f(x) = \frac{m}{1 + ae^{-bx}},$$

com os parâmetros m, a e b positivos e em que e é o número de Nepper. A função descreve muitas situações de crescimento de populações ao longo do tempo e o seu gráfico tem esta forma:

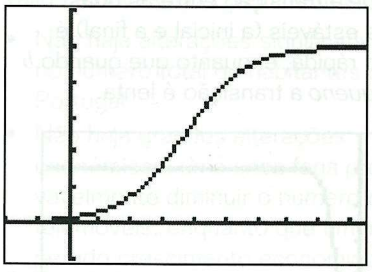


Gráfico da função logística

Se considerarmos a variável independente x como o tempo decorrido, podemos ver que, no início, nada parece acontecer. A certa altura o crescimento confunde-se com um crescimento exponencial para depois se começar a atenuar, acabando a função por estabilizar num certo valor. Ou seja, podemos identificar várias fases. Na primeira fase ainda não há condições para a população se desenvolver e os valores da função são praticamente nulos. Na segunda fase, surgem as condições ideais e a população cresce sem entraves, como uma exponencial. A seguir, na terceira fase, começam a surgir dificuldades (falta de espaço vital, falta de alimentos suficientes) e o crescimento começa a atenuar-se. Finalmente, na fase final, atinge-se o ponto de saturação: para as condições existentes, a população atingiu praticamente o seu máximo e já não consegue aumentar mais.

Para conseguir descobrir uma função destas, que se adapte bem à situação real da evolução do número de telemóveis, convém tentar perceber a influência dos parâmetros m, a e b.

Comecemos por ver quais são os limites da função quando x tende para $-\infty$ e para $+\infty$.

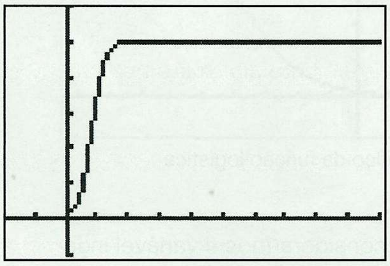
Quando x tende para $-\infty$, e^{-bx} tende para $+\infty$ e portanto $f(x)$ tende para 0.

Quando x tende para $+\infty$, e^{-bx} tende para 0 e portanto $f(x)$ tende para m, ou seja, m é o valor em que a função vai estabilizar.

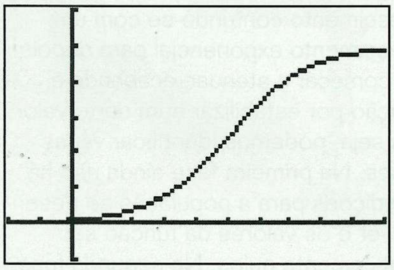
Para x=0 vem

$$f(0) = \frac{m}{1+a}.$$

Se experimentarmos diferentes valores para b, mantendo os restantes invariáveis, vemos que quando b é *grande* a transição entre as duas fases estáveis (a inicial e a final) é muito rápida, enquanto que quando b é *pequeno* a transição é lenta.

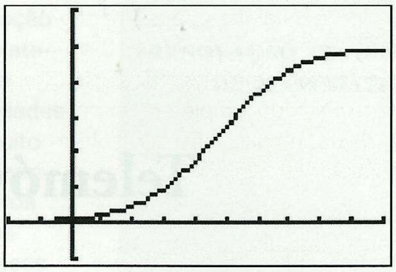


valor *grande* de b

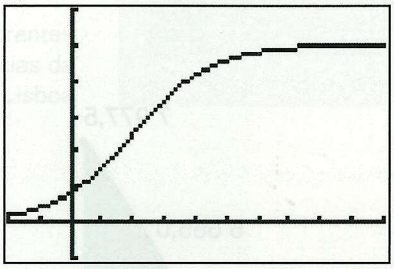


valor *pequeno* de b

Fazendo variar apenas o parâmetro a, vemos que a alteração no gráfico corresponde a uma translação horizontal.



valor *grande* de a



valor *pequeno* de a

Poderá ser um exercício interessante mostrar porque é que isto tem de ser assim (querem experimentar?).

Finalmente, verificamos que o ponto de inflexão da curva (que é o momento em que o crescimento se começa a atenuar) fica a meia distância entre 0 e m e portanto corresponde a

$$f(x) = \frac{m}{2}.$$

Resolvendo então a equação

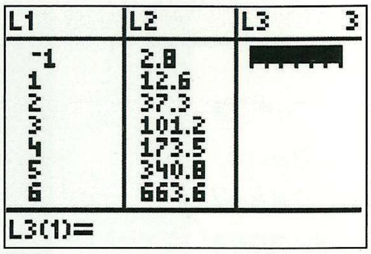
$$\frac{m}{1+ae^{-bx}} = \frac{m}{2}$$

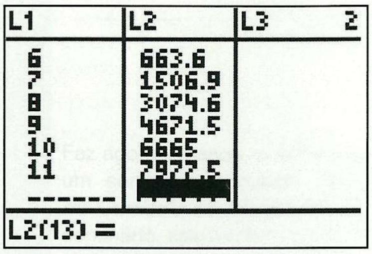
obtemos

$$x = \frac{\ln a}{b}.$$

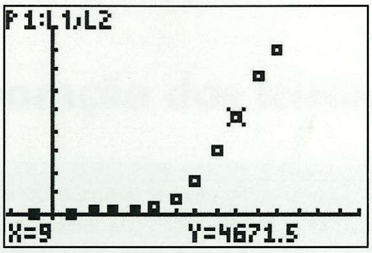
À procura da função

Comecemos por introduzir os dados numa calculadora gráfica. Na lista 1 pomos o tempo. Podemos situar a origem no ano de 1990. Como uns dias antes já o jornal *Público* tinha trazido alguns destes dados, incluindo também o ano de 1989 com 2800 assinantes, podemos acrescentar esse valor (que corresponderá a $x = -1$).





Fazemos agora o gráfico correspondente.



O ponto de inflexão parece acontecer em 1999 (x=9) com 4671,5 milhares de assinantes.

Uma primeira estimativa para m será então:

$$m \approx 2 \times 4671,5 \approx 9343$$

Não temos o dado correspondente a 1990 (x=0), mas sabemos que é um valor entre 2,8 e 12,6. Admitamos que é 6 (mais tarde poderemos corrigi-lo se der origem a desvios importantes). Virá então:

$$\frac{m}{1+a} = 6$$

e portanto $a \approx 1550$

Finalmente, como no ponto de inflexão se verifica para

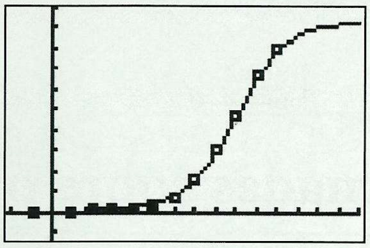
$$x = \frac{\ln a}{b},$$

vem:

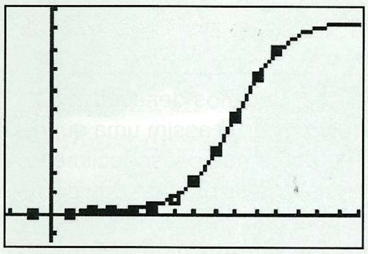
$$9 = \frac{ln1550}{b}$$

e vem $b \approx 0,8162$

Experimentando a função com os valores obtidos para os parâmetros, obtemos este gráfico.



Nada mau! No entanto, vemos que a função está ligeiramente deslocada para a direita. Fazendo então alguns acertos e experiências, chegamos por fim a um gráfico em que a função *passa* praticamente por todos os pontos:



A função correspondente é:

$$f(x) = \frac{9400}{1 + 1400e^{-0,812x}}$$

O modelo parece ser bastante aceitável. Podemos até fazer uma tabela com os valores reais e os valores dados pela função logística, para os comparar.

L1	L2	L3 3
-1	2.8	2.98
1	12.6	15.099
2	37.3	33.941
3	101.2	76.105
4	173.5	169.7
5	340.8	373.78
6	663.6	801.96

L3 =Y1(L1)

L1	L2	L3 3
6	663.6	801.96
7	1506.9	1632
8	3074.6	3019.4
9	4671.5	4849.8
10	6665	6635.9
11	7977.5	7933
------	------	

L3(13) =

Que acham? Bastante razoável …

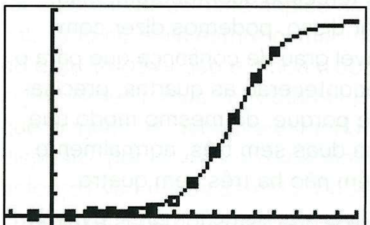
Claro que poderíamos ter usado logo a calculadora para encontrar a função logística que melhor se adapta ao conjunto de dados, mas perderíamos algum do encanto que é fazer uma pesquisa por nossa conta. Por outro lado, com os alunos penso que se lhes deve sempre pedir que tentem encontrar primeiro, usando raciocínios, cálculos simples e algumas tentativas, uma função que achem razoável.

Mas vamos então agora pôr a calculadora a trabalhar por nós, usando a regressão logística.

```
EDIT CALC TESTS
7↑QuartReg
8:LinReg(a+bx)
9:LnReg
0:ExpReg
A:PwrReg
B:Logistic
C:SinReg
```

```
Logistic L1,L2,Y3
```

```
Logistic
 y=c/(1+ae^(-bx))
 a=1677.284477
 b=.8273357099
 c=9470.74058
```



O gráfico praticamente não se distingue do anterior. Os valores dos parâmetros são: $m \approx 9471$, $a \approx 1667$, $b \approx 0,8273$.

E o futuro, como será?

Bem, e agora podemos tentar fazer um pouco de futurologia …

Quantos telemóveis haverá no final de 2002?

Pelo primeiro modelo, descoberto *manualmente*, será $f(12) = 8686,8$.

Pelo "melhor" modelo, o da máquina, será $f(12) = 8754,4$.

Outra questão: em que valor tenderá a estabilizar o número de assinantes de telemóvel em Portugal?

Os modelos indicam 9 400 000 e 9 470 000, respectivamente. Como a população portuguesa é de cerca de 10,4 milhões, isto quer dizer que aproximadamente 91% das pessoas usam ou virão a usar telemóvel. Ou melhor, que por cada 100 portugueses haverá 91 telemóveis.

Quando se faz um modelo matemático de uma situação e depois se tenta extrapolar para fora dos limites estudados (neste caso, ver o que acontecerá no futuro), é preciso tomar algumas precauções.

Mesmo admitindo que o modelo está teoricamente correcto, as previsões poderão sair erradas. Para sairem correctas é necessário que não se dêem alterações das condições que influenciam o fenómeno em estudo.

Concretizemos para o caso dos telemóveis. Para que o modelo continue válido é necessário, pelo menos, que:

- Não haja alterações significativas no número total de habitantes de Portugal.
- Não haja grandes alterações económicas: uma crise faria provavelmente diminuir o número de telemóveis, enquanto que um inesperado crescimento económico o poderia fazer aumentar.
- Não surja um novo produto ou serviço que funcione como substituto do telemóvel.

P.S. Já este artigo estava escrito quando saiu a notícia: no final de 2002 havia 8529 mil assinantes de telemóvel em Portugal. Este valor, embora muito próximo, é ligeiramente menor do que aquele que tinha sido previsto. Serão já efeitos da crise económica?

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira, Lisboa