Vida Real e Cabri

Vidal Minga

O tapete de corda e o seu motivo central

Enquanto esperava a minha vez para o exame clínico, ia observando o tapete artesanal de corda, que ocupava o centro da sala de espera. O motivo central era constituído por 5 círculos, um central mais pequeno e outros 4 periféricos maiores, tangentes ao círculo central e tangentes entre si. (V.fig.1)

As tangências simultâneas dos 5 círculos prenderam-me a atenção e fiquei a pensar como é que o artesão teria conseguido determinar esses pontos de tangência. Simples seria construir o motivo a partir dos círculos maiores, trabalhando de fora para dentro.

A certa altura pensei: "se eu fosse fabricante de tapetes gostaria de começar pelo círculo central". Seria interessante poder confeccionar tapetes com este motivo a partir de um qualquer círculo central, um círculo com medidas pré-determinadas, a gosto do cliente.

Na figura 2 podemos ver que o sistema de eixos perpendiculares e de simetria do círculo central contém o lugar geométrico dos pontos de tangência dos 4 círculos maiores e as bissectrizes dos quadrantes contêm o lugar geométrico dos pontos de tangência entre o círculo central e os outros círculos.

Para elaborar o projecto do motivo de modo a obter as tangências simultâneas entre os círculos, havia que determinar os centros de cada um dos círculos periféricos, nos respectivos quadrantes. Isto seria possível, se conseguíssemos descobrir uma relação entre as dimensões do círculo origem e as dimensões correspondentes dos círculos periféricos. Ampliar ou reduzir o círculo central traduzia-se numa ampliação ou redução dos outros círculos, o que me levou à intuição de que por exemplo as razões entre raios ou entre áreas dos círculos seriam invariantes, qualquer que fosse a composição escolhida.

Medindo e calculando, verificamos que a razão entre as dimensões dos raios, do maior para o menor era 2,41. Ampliando ou reduzindo a figura 3 e medindo e calculando de novo, a cada modificação, verificamos a invariância, daquela razão. Veja-se a tabela da figura 3 com os resultados de algumas dessas experiências.

Conhecida esta razão entre raios e a sua invariância, e tomando um círculo qualquer para origem do motivo, não

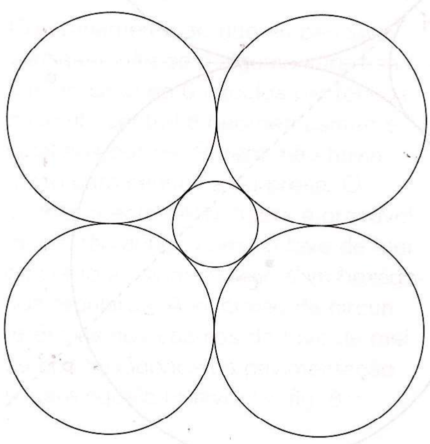


Figura 1.

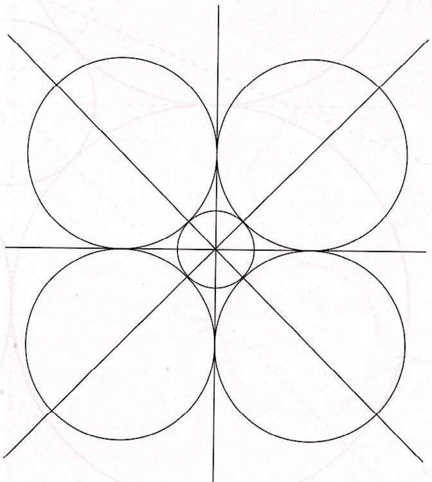
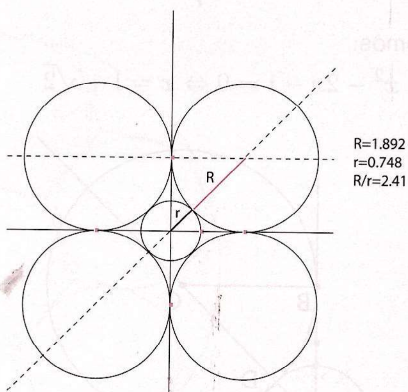


Figura 2.



	R	r	R/r
1	1.884	0.764	2.41
2	2.115	0.893	2.41
3	2.512	1.040	2.41
4	1.892	0.784	2.41

Figura 3.

temos senão de multiplicar o raio do círculo origem por aquele valor, 2.41, para obter o raio de qualquer dos restantes círculos que vão completar a figura em redor do primeiro. Conhecido o raio, a posição tangencial dos círculos não oferece dificuldade e o problema fica resolvido.

O valor 2,41 é um valor aproximado daquela razão por defeito. Tem contudo o rigor necessário e suficiente, para o nosso objectivo, porque o erro, não é significativo quando se trata da confecção de tapetes de corda. Mas se houvesse necessidade do valor exacto daquela razão para o rigor dos cálculos, podíamos conjecturar acerca desse valor exacto.

Como um valor aproximado de $\sqrt{2}$ é 1,41 a nossa intuição sugere-nos que 2,41 poderá ser uma aproximação racional de número irracional $1+\sqrt{2}$ e formular a conjectura de que

$$R/r = 1+\sqrt{2}.$$

Esta conjectura pode ser validada com a seguinte demonstração sobre a figura 4.

Seja $\overline{AD} = r$, $\overline{DC} = R$, $\overline{BC} = R$.

$$(r+R)^2 = 2R^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r^2 + 2rR + R^2 = 2R^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{r^2}{r^2} + \frac{2rR}{r^2} + \frac{R^2}{r^2} = \frac{2R^2}{r^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^2 - \frac{2R}{r} - 1 = 0$$

Fazendo

$$x = \frac{R}{r}$$

Temos:

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1+\sqrt{2}$$

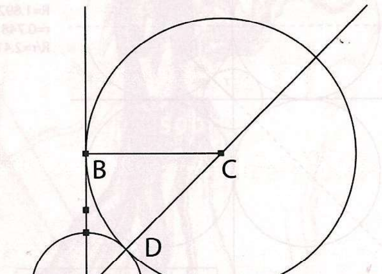


Figura 4.

O objectivo inicial de construir o motivo a partir de um círculo central arbitrário cumpre-se com a descoberta e confirmação desta relação entre raios. Entretanto, as figuras utilizadas até agora foram construídas sempre a partir dos círculos periféricos, tal como teria feito o artesão. Podemos dizer também que se trata da resolução de um problema geométrico através de uma solução numérica.

Ora, ao geómetra pareceria muito mais interessante uma solução exclusivamente geométrica do problema: construir os 4 círculos maiores, dado o círculo central e prescindindo absolutamente do conhecimento de R/r.

Os pontos de tangência com o círculo menor eram previsíveis na intersecção dos eixos ou das bissectrizes dos quadrantes com o próprio círculo. A dificuldade estava em determinar os pontos de tangência dos outros círculos entre si. Com algum trabalho de experimentação foi possível descobrir os outros dois pontos de tangência de cada círculo periférico. Conhecidos os três pontos de tangência de um círculo, a localização do respectivo centro não oferecia dificuldade.

A figura 5 mostra-nos o processo de construção a partir do ponto de tangência T1.

A construção

1. Círculo arbitrário de centro O
2. Perpendiculares c e d passando pelo centro O
3. Bissectriz b do 1° quadrante: T1, 1° ponto de tangência
4. Perpendicular a b por T1: P, intersecção com a recta c
5. Círculo com centro em P e raio igual a [PT1]: T2, 2° ponto de tangência.
6. Bissectriz $b1$ do $\angle$T1PT2: C, intersecção das bissectrizes b e $b1$
7. Círculo tangencial com centro em C.

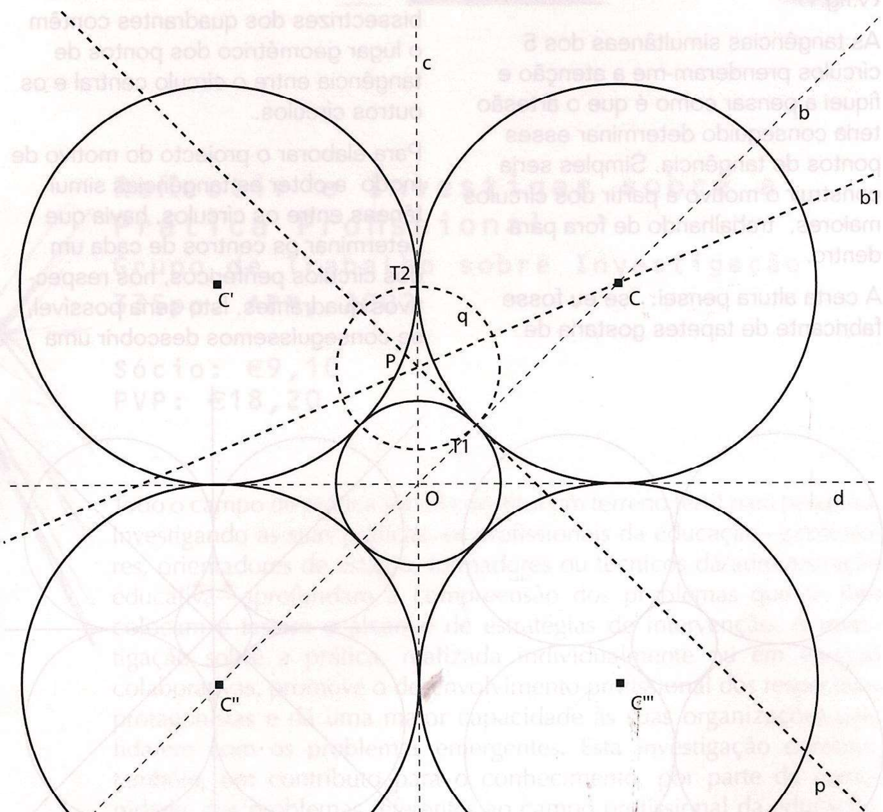


Figura 5.

Os centros dos outros 3 círculos tangenciais, C', C'' e C''' obtêm-se como imagem de C, por reflexão, respectivamente sobre o eixo c, o centro O e o eixo d.

Medindo e comparando os raios r e R nesta figura podemos obter uma tabela de valores com os resultados idênticos aos da tabela da figura 3 para R/r. Mas podemos prescindir desta verificação e com o uso de um simples compasso e da régua não graduada, demonstrar a validade da construção. Com efeito, traçados a tangente p em T1 e a circunferência de centro P e raio r, vem:

1. $\overline{OT1} = \overline{T1P} = \overline{PT2} = r$
2. $\overline{OT1} = \overline{PT1} \Rightarrow \overline{OP} = \sqrt{2}$
3. $\overline{PT2} + \overline{PO} = R = r + \sqrt{2}$

Fazendo $r = 1$, pode escrever-se:

4. $$R = r + \sqrt{2} = = r(1+\sqrt{2}) \Rightarrow R/r = = (1+\sqrt{2})$$

Esta relação só é válida para a figura com os 4 círculos periféricos. (V. fig. 5) O factor numérico de r aumenta ou diminui conforme diminui ou aumenta o número de círculos à volta do círculo central.

Mas o processo geométrico é universal e pode ser utilizado para qualquer número de círculos periféricos. Vejamos por exemplo o motivo com 5 círculos. (V.fig.6)

Nesta altura, pensei eu, que se acrescentasse mais um círculo à figura, a razão entre os raios dos círculos passaria a ser menor que 1. Não era verdade! (V. fig.7)

Contrariamente ao que eu pensava, verifiquei, não sem alguma surpresa, que no caso de 6 círculos periféricos, o círculo central é geometricamente igual aos outros. Porém, não havia razão para nenhuma surpresa. O conhecimento desta figura é provavelmente tão antigo como o favo de mel ou como a pavimentação com hexágonos regulares. A inscrição de circunferências nos casulos do favo de mel ou nos hexágonos da pavimentação sugere aquele motivo. (V. fig. 8)

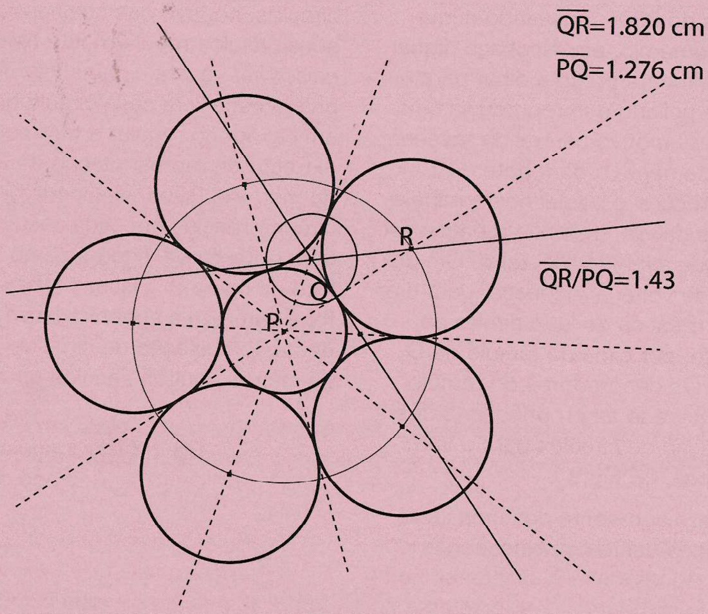


Figura 6.

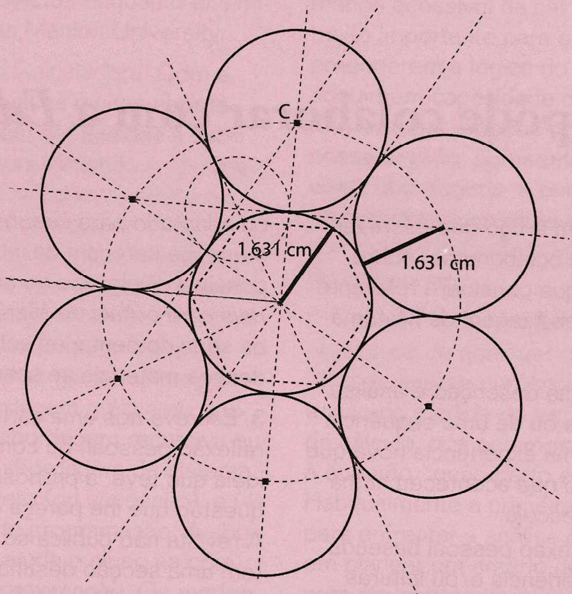


Figura 7.

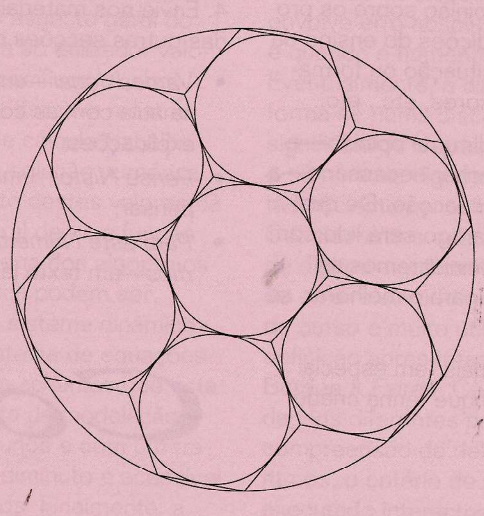


Figura 8.

Em finais de 2001, passando numa loja de comércio, em Alcobaça, fiquei agradavelmente preso a olhar para um quadro ampliado que reproduzia uma rosácea. O motivo central da rosácea era exactamente o do tapete de 7 círculos. Procurei o postal nos estabelecimentos da vila, mas não o encontrei. Supus que seria do Mosteiro. Um dia mais tarde voltei a Alcobaça, para tirar a foto à rosácea do lado direito do transepto, por cima do túmulo de D. Pedro I. Os decoradores do templo, tinham utilizado as propriedades desta combinação de círculos para o vitral da rosácea. (V. Fig.9)

A natureza apresenta-nos uma ideia aproximada desta combinação de círculos, no favo das abelhas, com os seus casulos regularmente hexagonais. Aliás, basta circunscrever apropriadamente em cada círculo da foto um hexágono regular e teremos um extracto da representação de um favo de mel. Ao invés, se inscrevermos circunferências em cada casulo de um favo obteremos figuras como a da foto da figura 9. E quem sabe se não foi a natureza a sugerir a harmonia desta combinação de círculos iguais há muitos, muitos séculos atrás?!

Vidal Minga
EB 2,3 Dr. Joaquim Barros
Paço de Arcos

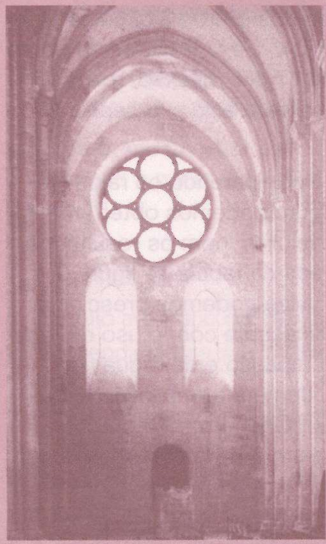


Figura 9.

Como pode colaborar com a *Educação e Matemática*?

1. Envie-nos um artigo que escreveu, sozinho ou em colaboração, sobre uma questão que considere relevante no ensino-aprendizagem da Matemática. O texto
   - pode ser uma descrição e análise de uma aula ou de uma sequência de aulas, uma experiência nova que tentou, algo que aconteceu numa aula ou na escola;
   - ou uma reflexão pessoal baseada na sua experiência e/ou leituras que fez;
   - ou então uma opinião sobre os programas, as condições do ensino da Matemática, a situação ou formação dos professores, etc., etc..

   Não hesite em pedir uma opinião—e mesmo ajuda, se achar necessário—a algum colega da Redacção. De qualquer modo, o seu artigo será lido com atenção e nós comunicaremos as nossas sugestões para o melhorar, se for caso disso.

2. Envie-nos materiais (em especial fichas de trabalho) que tenha criado ou adaptado para usar nas suas aulas e que lhe pareçam de interesse para possível divulgação na secção *Materiais para a Aula de Matemática*. Junto os seus comentários sobre o uso desses materiais se achar necessário.

3. Escreva-nos uma carta com a sua reflexão pessoal, ou com uma simples ideia que teve, a propósito de alguma questão que lhe pareça de interesse. A revista não publica só "artigos", tem uma secção destinada a pontos de vista, reacções e ideias breves.

4. Envie-nos materiais para alguma das outras secções da Revista:
   - *Vamos Jogar*—um jogo para usar na aula com as correspondentes explicações;
   - *Pense Nisto*—uma questão para pensar;
   - *Para este Número Seleccionámos*—um texto já publicado mas que seria interessante reproduzirmos na Educação e Matemática (traduzido se o original estiver escrito noutra língua); nós pediríamos autorização para reproduzi-lo.

5. Envie as suas reacções a artigos e materiais que surgiram na Revista, quer sejam de apoio ou de discordância. Seria muito bom mantermos discussões sobre questões polémicas nas páginas da revista.

6. Comunique-nos ideias para temas a tratar na Revista, mesmo que não queira escrever sobre eles. Em especial, pode ser importante sabermos que valeria a pena fazermos uma reportagem numa escola ou numa turma.

7. Envie-nos notícias e informações sobre acontecimentos que lhe pareçam relevantes para publicação, incluindo fotografias e outras ilustrações.

Colabore!