

# Argumentação na aula de matemática

## Olhares sobre um projecto de investigação colaborativa

Ana Maria Boavida, Anabela Gomes  
e Sílvia Machado

### Introdução

Diversos documentos relacionados com o ensino e aprendizagem da matemática destacam, actualmente, a importância dos alunos se envolverem em actividades de argumentação matemática enquanto experiências particulares de aprendizagem em que a fundamentação de raciocínios, a descoberta do porquê de determinados resultados ou situações, a resolução de desacordos através de explicações e justificações convincentes e válidas de um ponto de vista matemático, a formulação e avaliação de conjecturas e a refutação ou prova dessas conjecturas assumem um papel preponderante.

A emergência de uma problemática da argumentação no âmbito da educação matemática localiza-se na convergência do reconhecimento e interesse por várias ideias, algumas das quais situadas no interior deste campo e outras relacionadas, mais directamente, com áreas de conhecimento com que ele se articula. Entre essas ideias destacam-se, em particular, (a) a perspectiva — veiculada por actuais tendências na filosofia e sociologia da ciência — de que a produção científica é uma actividade humana, desenvolvida a um nível simultaneamente individual e social, onde a resolução de problemas e os processos de

argumentação ocupam um lugar de destaque, (b) o equacionamento dos fenómenos de aprendizagem da matemática em quadros teóricos que valorizam a interacção, (c) a valorização das linguagens naturais consideradas um meio fundamental e privilegiado de promover e facilitar a comunicação entre os indivíduos, (d) dificuldades encontradas no ensino e aprendizagem da prova matemática e a procura de caminhos que facilitem esta aprendizagem, (e) a importância atribuída a objectivos curriculares que valorizam o raciocínio matemático, considerado nas suas múltiplas vertentes e (f) a necessidade dos sistemas educativos proporcionarem, a todos os alunos, possibilidades de desenvolvimento de certas competências transversais, entre as quais a competência argumentativa, fundamentais ao exercício de uma cidadania responsável numa sociedade que se quer democrática.

Apesar do reconhecimento de que a argumentação matemática é uma componente do raciocínio matemático indispensável à construção de objectos matemáticos e de uma racionalidade matemática, esta actividade é, muitas vezes, inexistente em diversas salas de aula. Por outro lado, vários estudos têm mostrado que não é fácil criar ambientes de ensino facilitadores do desenvolvimento, pelos alunos, de competências argumentativas. Na

verdade, estes são processos muito complexos que se revestem de sérias dificuldades para os alunos e que colocam vários problemas e dilemas ao professor. Conhece-se pouco sobre os processos argumentativos, sobre o trabalho do professor a eles associado, sobre o que o pode facilitar ou o dificultar.

É neste contexto que surge a ideia de desenvolver um projecto de investigação colaborativa focado na dinâmica da aula de matemática quando os alunos se envolvem em actividades de argumentação matemática, com especial incidência na análise do papel do professor. Este artigo apresenta alguns aspectos relacionados com o desenvolvimento deste projecto.

### Um projecto de investigação colaborativa: Intervenientes e etapas

O projecto iniciou-se em Novembro de 2001 e prevê-se que continue até Maio de 2003. Desenvolve-se em duas turmas do 3.º ciclo do ensino básico e envolve três professoras: a Ana, docente numa Escola Superior de Educação, a Anabela, professora numa escola 2,3 e a Sílvia que exerce a sua actividade numa escola do ensino secundário. A Sílvia e a Anabela leccionaram em 2001/2002



as turmas do 8º ano em que o projecto se desenvolveu, mantendo estas turmas, agora no 9º ano, em 2002/2003.

Seguindo diversos autores, perspectivou-se a investigação colaborativa como uma investigação que é feita *com* pessoas e não *sobre* pessoas. A adesão a esta ideia orienta a forma como se concebe a organização e natureza do trabalho a desenvolver conjuntamente. Assim, ao longo de todo o percurso de trabalho em colaboração já experienciado privilegiou-se a construção de relações pessoais não hierárquicas e baseadas na confiança, respeito e compromisso. Considerou-se que existiam entre os elementos do grupo diferenças complementares de competências, formações, experiências e perspectivas que constituíam um recurso para o

trabalho colaborativo. O que importa é tirar partido desta complementaridade para que os seus benefícios governem o processo de colaboração. Esta ideia abriu a porta à possibilidade de existirem papéis diferenciados entre os membros do grupo. Procurou-se que estes papéis, as responsabilidades e a natureza do envolvimento de cada uma de nós nas várias tarefas a realizar fossem cuidadosamente negociados sendo as decisões conjuntamente tomadas, tendo em conta as necessidades, expectativas e desejos de todas. Privilegiou-se a necessidade e vontade de uma comunicação efectiva no grupo, valorizando-se a participação de cada pessoa e encarando-se a diversidade de pontos de vista, não como algo a evitar, mas como um factor enriquecedor do diálogo profissional. Deste modo, todas nós, ao partilharmos, com liberdade, interpretações e significados, enriquecemos a nossa compreensão sobre o tema do projecto e contribuimos para o pensamento criativo que é parte da investigação.

O projecto desenrola-se em duas fases, a primeira relativa ao ano lectivo de 2001/2002 e a segunda correspondente a 2002/2003. É sobre parte do trabalho realizado na primeira fase que incide este artigo.

Em 2001/2002 a equipa do projecto reuniu-se semanalmente e o trabalho que desenvolveu organizou-se em torno de quatro etapas, que embora interligadas, visaram, prioritariamente, objectivos diferentes.

- A primeira etapa focou-se na negociação inicial do projecto de colaboração.
- A segunda centrou-se quer na análise de episódios de sala de aula e outros documentos de carácter teórico relacionados com o tema da argumentação matemática, quer na discussão e reflexão sobre tarefas potencialmente desencadeadoras de actividades de argumentação na aula de matemática. Durou cerca de dois meses e teve como objectivos prioritários o conhecimento recíproco e a construção de uma linguagem e referencial comuns. A existência desta etapa facilitou todo o trabalho posteriormente realizado. De facto, embora estes

dois objectivos tivessem estado presentes em todo o percurso de desenvolvimento do projecto, ela permitiu-nos, desde o início, não só começar a partilhar e enriquecer perspectivas sobre a argumentação na aula de matemática de modo a comunicarmos de uma maneira mais efectiva, mas também a iniciar o desenvolvimento, entre nós, de uma relação de confiança e cuidado que se revelou fundamental nas etapas seguintes.

- A terceira etapa foi a mais longa (cerca de 4 meses), constituiu um período fundamentalmente dedicado à preparação e observação de aulas e à reflexão conjunta sobre episódios de argumentação aí existentes e incluiu a selecção/construção de tarefas consideradas, potencialmente, desencadeadoras de actividades de argumentação matemática. A escolha destas tarefas estava a cargo de toda a equipa do projecto. As opções relacionadas com a condução e gestão das aulas em que seriam propostas, bem como a identificação do momento mais adequado para o fazer eram da responsabilidade da Sílvia e da Anabela embora, muito frequentemente, algum do tempo das sessões de trabalho conjunto fosse dedicado a analisar e discutir ideias relacionadas com estes aspectos. A Ana garantia a gravação áudio e vídeo destas aulas e providenciava sempre a reprodução de três cópias de cada uma que distribuía a todos os elementos da equipa. Para além disto, transcrevia partes de aulas identificadas como relevantes pelo grupo, que fazia chegar à Anabela e à Sílvia. A partir daqui, e depois de uma análise feita individualmente por cada uma de nós com base nas gravações vídeo e transcrições, procedíamos a uma reflexão conjunta sobre os episódios de argumentação matemática existentes nas aulas gravadas: o que os desencadeou, o que os facilitou, o que os dificultou, qual o papel dos alunos, qual o papel do professor, que dificuldades experimentaram os alunos, que problemas se colocaram ao professor ...
- A quarta etapa destinou-se a uma reflexão global sobre todo o traba-





lho desenvolvido até ao momento, à identificação de campos de investimento futuro e à preparação da divulgação do trabalho realizado, objectivo previsto desde o início do projecto<sup>1</sup>.

Embora estas etapas fossem, em certa medida, sequenciais, foram também interdependentes. Por exemplo, à medida que íamos partilhando dúvidas, riscos e vulnerabilidades inerentes, nomeadamente, ao próprio processo de análise de episódios de aulas gravadas e de preparação conjunta de uma sessão pública de divulgação do trabalho conjuntamente realizado, íamos também desenvolvendo afinidades, aprofundando o conhecimento recíproco e melhorando a nossa relação de confiança e cuidado, objectivos considerados prioritários na segunda etapa. E embora tenha havido momentos em que se dedicou uma atenção especial à negociação do plano de trabalho conjunto, houve ao longo de todo o processo uma renegociação constante dos caminhos a prosseguir de modo a que o trabalho a realizar tivesse em conta as necessidades, objectivos, interesses e desejos de cada elemento do grupo.

### Trabalho realizado no âmbito do projecto: Alguns aspectos

Uma das primeiras necessidades com que nos deparámos no início do projecto foi a de construirmos uma perspectiva comum sobre o significado a atribuir a argumentação matemática. Simultaneamente, e à medida que íamos reflectindo sobre textos teóricos, analisando episódios de sala de aula, recolhidos em diversos contextos, e discutindo potencialidades educativas de determinadas tarefas matemáticas, ia ganhando força a ideia de que o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática poderia ser facilitado tanto pela existência, na sala de aula, de certas práticas normativas, como pela proposta de tarefas com determinadas características, embora, em relação a este último aspecto, se tivesse consciência de que as tarefas, em si mesmas, não contêm conceitos e ideias matemáticas o que origina que não determinem, por si só, as aprendizagens pretendidas ou as competências visadas.

A análise dos trabalhos de alguns autores ajudaram a tomar decisões quanto ao significado a atribuir, no âmbito do projecto, a argumentação matemática, a seleccionar tarefas potencialmente desencadeadoras de actividades de argumentação e a identificar normas reguladoras da actividade matemática cujo desenvolvimento na sala de aula se considerou desejável.

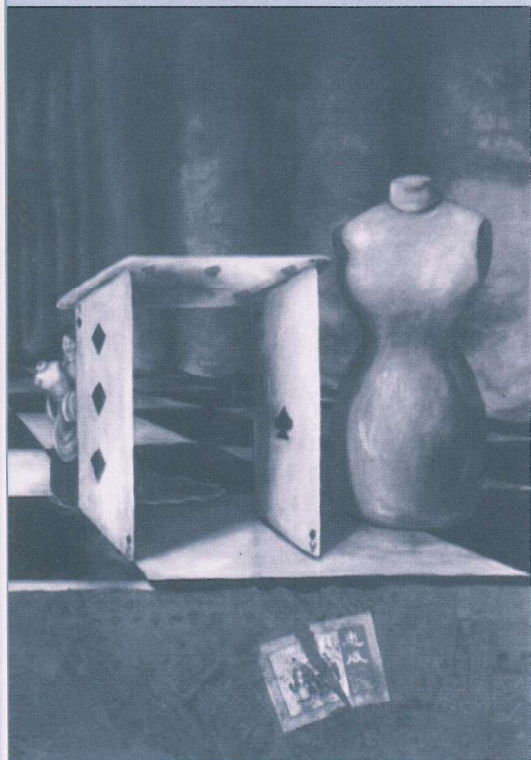
### Argumentação matemática: Que significado?

Ao estudarem a argumentação na aula de Matemática, Yackel & Cobb (1994) delimitam este conceito focando-se nas interações que estão relacionadas com explicações ou justificações intencionais do raciocínio dos alunos durante ou após tentativas de resolução de problemas. Neste âmbito distinguem várias funções para os argumentos: informar outros de interpretações do problema; re-descrever o que outros disseram; explicar métodos de resolução e respostas; tentar convencer outros sobre a validade ou não validade de uma resposta ou método de resolução; anunciar uma

descoberta matemática ou generalização. Wood (1999), por seu lado, considera a argumentação como um processo interactivo de saber como e quando participar num argumento, ou seja, numa troca discursiva entre pessoas com o objectivo de convencermos outros através de certos modos de pensamento. As trocas discursivas analisadas por esta autora, no âmbito de um projecto conduzido em aulas de matemática de alunos do 2º ano de escolaridade, tiveram por base um desafio definido como a expressão de um desacordo acerca de uma explicação apresentada.

As perspectivas sobre argumentação expressas por estes autores levam-nos a considerar, seguindo, por exemplo, Krummheuer (1995), que a argumentação na aula de matemática não deve ser considerada equivalente à demonstração matemática, entendida como um encadeamento dedutivo e formalmente lógico que conduz, necessariamente, ao estabelecimento de conclusões também formalmente lógicas. Ou seja, a argumentação na aula de matemática embora possa incluir processos de produção de provas matemáticas é uma actividade mais ampla do que a que estabelece, necessariamente, a veracidade de um resultado através de um percurso formal, lógico e linear. Esta ideia parece ser consistente com outra apresentada por Lampert (1990), para quem a argumentação matemática é um caminho em zig-zag — e não um percurso linear — que se inicia com a formulação de conjecturas, que envolve a análise de premissas e inclui desacordos e contra-exemplos.

Tendo em conta as ideias anteriormente apresentadas, considerámos, no âmbito do projecto, que os alunos se envolvem em actividades de argumentação matemática quando vivem experiências de aprendizagem em que, individual ou colectivamente, (a) se interrogam sobre o porquê de determinados resultados, relações, procedimentos ou ideias, procuram descobrir estes porquês e, nesse processo, fundamentam os raciocínios que fazem e as respostas que apresentam através da apresentação de justificações, adequadas ao seu nível etário, mas aceitáveis de um ponto





de vista matemático; (b) participam na análise e resolução de desacordos, relativamente a afirmações ou questões matemáticas, não através do recurso a uma autoridade exterior — seja ela do professor ou do manual — mas antes através da apresentação de argumentos convincentes e matematicamente consistentes; (c) formulam conjecturas, investigam a sua plausibilidade e tentam refutá-las ou validá-las através da procura de contra-exemplos ou da construção e/ou avaliação de provas matemáticas.

### Tarefas matemáticas: Que opções?

Uma vez que pretendíamos que os alunos se envolvessem em actividades de argumentação matemática, procurámos seleccionar tarefas não rotineiras que os desafiassem a ir para lá da mera manipulação mecânica de símbolos e cuja resposta não pudesse ser encontrada através da simples aplicação directa de procedimentos já seus conhecidos. Pretendíamos tarefas que, potencialmente, originassem boas discussões matemáticas, que proporcionassem o confronto de ideias e resoluções e que desafiassem os alunos a envolverem-se na procura, defesa e justificação de posições, processos e soluções. Neste âmbito, optámos por problemas e tarefas de carácter investigativo. Em qualquer dos casos os alunos desconheciam o processo de resolução. No entanto, as tarefas de carácter investigativo distinguiram-se dos problemas pelos processos matemáticos que lhes estavam associados. Nomeadamente, pretendia-se que os alunos explorassem situações a partir da análise de casos particulares, formulassem questões, identificassem regularidades, descobrissem relações, formulassem conjecturas, testassem estas conjecturas e as reformulassem no caso de se revelarem incorrectas e que tentassem validar as que resistiam a tentativas de refutação apresentando argumentos convincentes para si próprios e para a turma, incluindo aqui o professor (Brocardo, 2001). Pretendia-se, além disso, que os alunos ganhassem alguma compreensão sobre a origem e processo de formulação das conjecturas em

matemática, aprendessem a distinguir conjectura de afirmação provada, se apropriassem da ideia de que muitos exemplos não chegam para garantir a validade de uma conjectura e que experienciassem a prova matemática como um instrumento que podem usar para explorar e compreender o porquê da validade de conjecturas formuladas e não apenas como um meio de garantir esta validade.

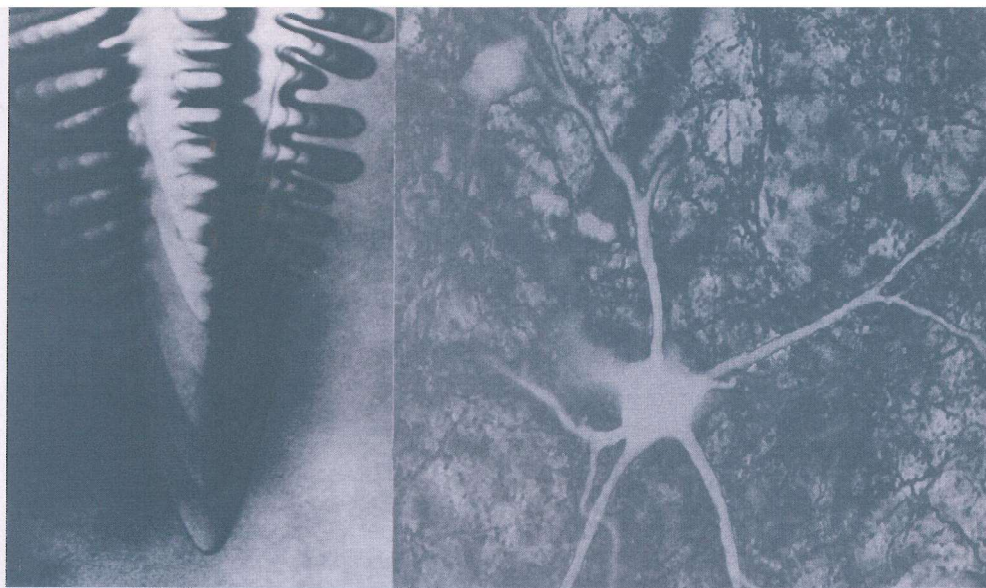
### Contextos para a argumentação matemática: Que caminhos?

Um dos dilemas com que o professor de matemática se confronta quando, na sala de aula, pretende envolver os alunos em actividades de argumentação matemática deriva do facto de, por um lado, procurar que as ideias que estes apresentam sejam as bases das justificações e discussões que ocorrem e, por outro lado, ter que se assegurar de que as trocas discursivas são matematicamente produtivas. Ou seja, o professor tem que, simultaneamente, promover o envolvimento dos alunos na apresentação e defesa de argumentos que, do ponto de vista destes alunos, validam as ideias que enunciam e assegurar-se do carácter matemático de tais práticas argumentativas. Estes dois objectivos nem sempre são fáceis de compatibilizar.

As ideias de Forman *et al.* (1998), relativamente aos meios através dos quais os professores socializam a argumentação através da *orquestração* de discussões na sala de aula, e os conceitos de *normas sociais* e *normas sócio-matemáticas*, utilizados, nomeadamente, por Cobb e Yackel (1998), revelaram-se, no âmbito do

projecto, instrumentos úteis para lidar com este dilema. Todos estes autores defendem que a argumentação na aula de matemática depende dos membros desta comunidade partilharem uma perspectiva comum tanto sobre os objectos em discussão como sobre os meios pelos quais a discussão pode ocorrer. Esta perspectiva depende, por seu lado, das expectativas dos diferentes membros que constituem esta comunidade. Por exemplo, se alguns alunos pensarem que a velocidade e a exactidão são mais importantes do que a compreensão, poderão ter dificuldades em aceitar o tempo, por vezes longo, necessário à exploração de situações e o risco inerente ao processo de formulação de conjecturas. Esta crença poderá entrar em conflito com expectativas de um professor que valorize o modo como os alunos explorem tarefas que lhe são propostas e discutem criticamente processos de resolução destas tarefas.

Forman *et al.* indicam que professor pode ajudar os alunos a mudar o modo como se vêem a si próprios e uns aos outros como participantes legítimos na actividade de formular, analisar e avaliar justificações, conjecturas e conclusões, orquestrando habilmente as discussões na sala de aula. Para ilustrar como pode ocorrer este processo recorrem à noção de *redizer* que envolve o re-falar o discurso de alguém através do *repetir*, *expandir*, *parafrasear* e *relatar*. O *redizer* inclui diferentes objectivos: clarificar ou amplificar o conteúdo do que é dito, ir mais longe na explicação do raciocínio, introduzir ideias particulares ou redirigir a discussão. O professor,





ao redizer o discurso dos alunos, para lá de o tornar mais visível para toda a turma o que poderá facilitar a sua avaliação, situa-os em relação ao conteúdo, confere-lhes um posicionamento em relação ao tópico em discussão, posicionamento este de que os alunos poderão apenas estar vagamente conscientes, e clarifica os pólos do debate mostrando, através deste processo, que espera que os alunos se responsabilizem pela defesa das ideias que apresentam.

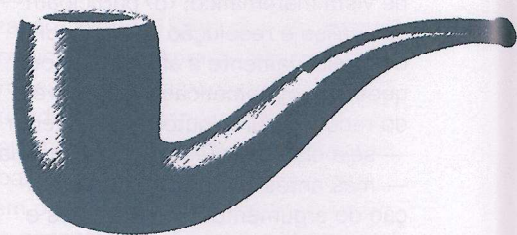
Cobb e Yackel recorrem aos conceitos de normas sociais e normas sócio-matemáticas para analisarem o processo pelo qual professores, participantes num projecto de inovação, lidaram com conflitos entre as suas expectativas e as dos alunos, relacionadas com a participação destes nas discussões com toda a turma. Para estes autores, culturas de sala de aula caracterizadas pela explicação, justificação e argumentação são, em geral, reguladas e sustentadas por normas que valorizam a explicação e justificação de soluções, as tentativas de encontrar sentido em explicações dadas por outros, a indicação de acordo ou desacordo e a discussão de alternativas conflitivas relativas a interpretações e soluções.

Contrariamente às normas sociais, cuja negociação pode ser feita no âmbito do ensino e aprendizagem de qualquer conteúdo disciplinar, as normas sócio-matemáticas focam-se "em aspectos normativos das discussões matemáticas específicos da actividade matemática dos alunos" (Yackel & Cobb, 1996, p. 461). Um exemplo de uma norma sócio-matemática é o que conta, na sala de aula, como uma explicação e justificação matemática aceitável.

Quer as normas sociais quer as sócio-matemáticas não são critérios pré-determinados, introduzidos na sala de aula a partir do exterior, nem a sua negociação é completamente antecipada e prevista pelo professor. Originam-se e são continuamente modificadas no decurso das interacções que se geram na sala de aula quando professor e alunos falam acerca da matemática. Ou seja, embora desde o início, o professor, que constitui na sala de aula o representante da comu-

nidade matemática, possa ter ideias claras sobre as normas que pretende desenvolver, fundamental é o modo como capitaliza acontecimentos não antecipados e os perspectiva como situações paradigmáticas para discutir com os alunos o que espera deles.

Tendo por referência as ideias anteriormente apresentadas, que foram objecto de reflexão nalgumas das sessões de trabalho do projecto, considerámos importante dedicar uma atenção especial e consciente à constituição, nas aulas, de um conjunto de normas partilhadas entre cada professora e os alunos de cada uma das turmas envolvidas no projecto, reguladoras da actividade matemática a desenvolver conjuntamente, que nos pareciam poder facilitar o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Procurava-se criar na sala de aula uma atmosfera de mútuo respeito e confiança que levasse os alunos a sentirem-se confortáveis, quer a expressarem e fundamentarem os seus pontos de vista, sem recearem os erros que poderiam cometer, quer a analisarem criticamente as ideias apresentadas por outros, a tentarem encontrar sentido nestas ideias e a manifestarem o seu acordo ou desacordo em relação a elas. Assim, ao longo de todo o ano lectivo de 2001/2002, a Sílvia e a Anabela, quer através de intervenções mais explícitas, quer implicitamente, através, por exemplo, da forma como geriam as interacções na sala de aula ou lidavam com acontecimentos não previstos, foram procurando que os alunos se apropriassem da ideia de que, na aula de matemática, se esperava que apresentassem explicações e justificações para as afirmações que faziam, que assumissem e defendessem as suas posições, que expressassem opiniões diferentes quando existiam, que se responsabilizassem pela fundamentação dos seus pontos de vista, que escutassem atentamente e tentassem compreender as ideias apresentadas por outros, que expressassem as suas próprias ideias de forma audível para todos e não se dirigindo apenas a elas próprias, e que participassem activamente nos processos de resolução de desacordos que emergiam de modo a, em conjunto, encontrarem consensos



*Ceci n'est pas une pipe.*

significativos para todos. Frequentemente houve necessidade de dar uma maior visibilidade a estes desacordos bem como a argumentos apresentados a favor de uma ou outra posição, o que foi feito pela Anabela e Sílvia que, recorrendo à noção de *re-dizer* de que falam Forman *et al.*, alinharam os alunos com uma ou outra posição, garantiram que explicações apresentadas por uns eram claras para todos e, além disso, actuaram como moderadoras, e não avaliadoras, na sua resolução. Ao longo de todo este processo foram, simultaneamente, procurando valorizar a ideia de que a fundamentação de opiniões e defesa de pontos de vista se deveria apoiar em argumentos matematicamente válidos, ou seja argumentos do tipo "é assim porque a maioria diz que é assim, ou porque o melhor aluno o disse ou porque a professora o ensinou" não foram considerados válidos nas aulas de matemática.

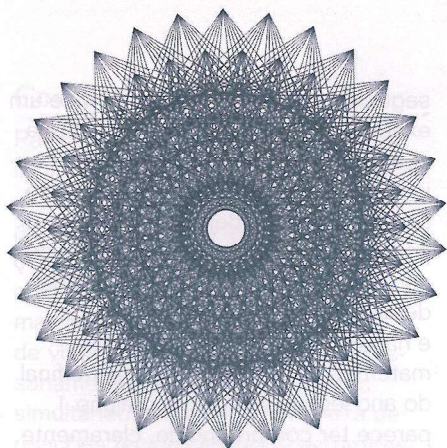
### Episódios de sala de aula: Alguns exemplos

Os dois primeiros episódios reflectem tentativas feitas numa das turmas para os alunos se apropriarem de normas reguladoras da actividade matemática a desenvolver na sala de aula. O episódio três passa-se numa outra turma e revela dificuldades relacionadas com a aprendizagem do processo de prova matemática.

#### Episódio 1

*Surge numa aula em que os alunos, a partir da análise de casos particulares, formularam conjecturas relacionadas com a relação entre a razão das áreas de dois triângulos semelhantes e a*





*razão de semelhança destes triângulos. A professora pretende que avaliem as conjecturas formuladas e que fundamentem a sua avaliação.*

1. Alunos: É o quadrado.
2. Aluno: É o dobro.
3. Professora: Ora bem, ora bem, ora bem. Tenho aqui duas opiniões. Uma que é o dobro e outra que é o quadrado.
4. Alunos: É o quadrado.
- (...)
5. Professora: E ainda há uma terceira opinião. Há alguém que acha que são as duas coisas (risos). Portanto, agora convençam-se ...

#### Episódio 2

*Anteriormente à ocorrência deste episódio, os alunos tinham formulado várias conjecturas, utilizando o Geometer Sketchpad, sobre o polígono obtido a partir da união dos pontos médios de lados consecutivos de um quadrilátero qualquer. No momento em que surge o diálogo, um dos alunos enunciou uma das conjecturas formulada pelo seu grupo. Na sequência, a professora lança à turma o desafio de comentarem o enunciado apresentado, tendo a intenção de, em conjunto, o tornarem mais preciso.*

1. Aluno: [enuncia a conjectura]
2. Professora: Diz mais alto, de maneira que se ouça, para toda a gente ouvir, com uma voz que se perceba [dirigindo-se ao aluno]. Ouçam agora ... [dirigindo-se à turma] *(O aluno repete e a professora regista no quadro o que o aluno dita)*
3. Professora: O que é que o resto da

- turma tem a dizer?
4. Aluna: Está incompleto
5. Professora: Está incompleto, porquê?
- (...)
6. Professora: Vocês convençam-se uns aos outros. Vejam se se habituam a falar uns com os outros e não só comigo ... Vá lá ...
7. Alunos vários: Têm que ser os pontos médios de lados consecutivos.
8. Professora: Estão todos a falar ao mesmo tempo, eu não ouço agora. Digam lá, vá ... Conseguem resolver vocês ...
9. Aluna: Põe-se consecutivos, mas ele ali em cima não tem.
10. Professora: E então?
11. Aluna: Se a gente não diz nada podemos unir cada ponto aos outros três.

Os episódios 1 e 2 surgem em aulas leccionadas em duas semanas consecutivas. Anteriormente, a reflexão feita, quer individualmente pela professora da turma, quer colectivamente na equipa do projecto, tinha evidenciado que, apesar dos esforços feitos em sentido contrário, neste momento havia ainda diversos alunos que pareciam valorizar apenas o que ela dizia, que viam a sua autoridade como a única forma de garantir a validade de uma afirmação e que quando solicitados a explicarem ou justificarem as suas ideias o faziam dirigindo-se apenas a ela e, nalguns casos, em voz tão baixa que a maior parte dos colegas não conseguiam entender. No primeiro episódio a professora começa por redizer as falas dos alunos, através do relato (linha 3), com o objectivo de os levar a avançarem na explicação do raciocínio. Ao fazê-lo, dá uma maior visibilidade à existência de posições divergentes face à tarefa ("tenho aqui duas opiniões"; "e ainda há uma terceira opinião") e, simultaneamente, torna legítima esta existência destacando, assim, que espera que os alunos não só observem essas diferenças como justifiquem, de uma forma convincente, as posições que adoptarem ("agora, convençam-se"). A importância dos alunos fundamentarem as suas afirmações de modo a resolverem desacórdos, aparece

também no segundo episódio ("você convençam-se uns aos outros"). Este ilustra, além disso, o modo como a professora tenta capitalizar acontecimentos da sala de aula para ajudar os alunos a interiorizarem normas que, do seu ponto de vista, caracterizam culturas de sala de aula onde a argumentação é valorizada. As intervenções das linhas 2 e 6 revelam a importância dos alunos falarem e se ouvirem uns aos outros: por um lado quem emite uma asserção deve fazê-lo de forma suficientemente audível para que todos, e não apenas a professora, possam avaliar o que é dito; por outro lado, a professora ao dizer "ouçam agora", "vejam se se habituam a falar uns com os outros e não só comigo" mostra que espera que os alunos escutem atentamente as ideias dos seus pares e não apenas aquilo que ela própria diz, passo fundamental para poderem encontrar sentido nas explicações dos colegas. Ao registar no quadro a conjectura apresentada pelo aluno e ao interpelar a turma através da pergunta "o que é que o resto da turma tem a dizer", abre um espaço para o questionamento de afirmações quando os alunos discordam delas. Simultaneamente, ao não corrigir a resposta do aluno, que regista no quadro tal como lhe é ditada, mostra que o seu papel é o de moderar a discussão e não o de avaliar o que é dito. Além disso, ao afirmar "consequem resolver vocês..." destaca a importância da obtenção, pelos alunos, de consensos sobre as respostas que apresentam. Por último, o pedido explícito de justificação feito a uma aluna, na sequência de uma resposta que esta apresenta, (linha 5) e a reacção "e então" à fala de outra (linha 10) indicam que espera que os alunos justifiquem as suas interpretações e posições.

#### Episódio 3

*Este episódio surge posteriormente a uma aula em que os alunos, a partir de explorações feitas com o Geometer Sketchpad, formularam, entre outras, a conjectura que indica que o polígono resultante da união dos pontos médios de lados consecutivos de um quadrilátero qualquer é um paralelogramo. Ocorre depois da professora ter pedido aos alunos que enuncias-*



sem todas as conjecturas formuladas, de ter desafiado a turma a analisá-las e discuti-las, de ter proposto que se tentasse provar uma das conjecturas não refutadas e da turma ter escolhido a "conjectura do paralelogramo". É neste contexto que as interações entre a professora e os alunos conduzem à produção de uma prova para esta conjectura tendo por referência um quadrilátero desenhado no quadro. O aluno 1, que participou adequada e activamente nestas interações, parece, no entanto, não ter ficado satisfeito com o trabalho realizado.

1. Aluno 1: Porque é que se prova, com um quadrilátero, que forma sempre um paralelogramo lá dentro, sôtor?
2. Professora: Então vamos lá ver. Eu não me preocupei... Diz lá [dirigindo-se à aluna 2 que manifestava vontade de responder].
3. Aluna 2: Está ali um exemplo...
4. Aluno 1: Está ali um exemplo?! ... Sôtor, mas com um exemplo não se prova nada... provamos é com conjecturas.
5. Aluno 3: Não! A conjectura vem de um exemplo.
6. Professora: Só um bocadinho. Diz lá [dirigindo-se ao aluno 3].
7. Aluno 3: Uma conjectura... Forma-se uma conjectura a partir de um exemplo.
8. Professora: A partir de exemplos. Depois para provares a conjectura ...
9. Aluno 3: Tem que ser com um contra-exemplo.
10. Professora: Um contra-exemplo é para quê? É para provar ou para...
11. Aluno 3: Para provar que não é.
12. Professora: Para provar que não é...
13. Aluno 3: Se a gente conseguir ver que... não conseguimos provar com um contra... pronto... isso (sorriso).
14. Professora: Se não conseguirmos arranjar um contra-exemplo, é isso que queres dizer?
15. Aluno 3: Sim. Se não conseguirmos arranjar um contra-exemplo é porque é verdadeira.
16. Professora: É porque é verdadeira ...
17. Aluno 1: E se houver alguém que

consiga arranjar? Tu não consegues mas há alguém que consegue ...

18. Aluno 3: Já não é.
19. Aluno 1: Aaaah!... (...) Então mas assim não dá para provar nada! Estamos a falar que aquilo é um paralelogramo!!!...
20. Aluno 3: Olha lá, contenta-te com o que a sôtor ensina, pá...
21. Professora: Não, não, não, [falando para o aluno 3]... (...)

À primeira vista poder-se-ia colocar a hipótese da primeira intervenção do aluno 1 estar relacionada com o questionamento da necessidade da prova. De facto, nesta altura, todos os alunos da turma, a partir das várias explorações que tinham feito com o *Geometer Sketchpad*, tinham constatado que não conseguiam encontrar um contra-exemplo que refutasse a "conjectura do paralelogramo". Embora na altura em que surge este episódio os alunos tivessem já experienciado outras situações de formulação e prova de conjecturas e da professora ter procurado, através de diversos meios, que os alunos se apropriassem da ideia de que muitos exemplos não bastam para garantir a validade de uma conjectura, esta concepção continuava a prevalecer em vários dos alunos. Este não parecia ser, no entanto, o problema do aluno 1.

A análise de várias intervenções que foi fazendo ao longo da aula revela que o que o parecia perturbar era o facto da prova se ter baseado no quadrilátero desenhado no quadro que ele interpretava como sendo um caso particular ("um exemplo") e não como uma figura que podia representar um quadrilátero qualquer. Este aluno estava consciente de que "com um exemplo não se prova nada" e daí a sua relutância em aceitar uma prova que, do seu ponto de vista, se baseava num exemplo.

Este episódio, ilustra, por outro lado, a tentativa dos alunos 1 e 3 encontrarem sentido na relação entre provas e conjecturas. A afirmação do aluno 1 "provamos é com conjecturas" parece revelar que não compreende ainda muito bem qual a função das conjecturas no processo de prova. O aluno 3 começa por questionar esta afirmação acrescentando, em

seguida, que "a conjectura vem de um exemplo" o que pode indiciar alguma compreensão sobre a origem das conjecturas. No entanto, para este aluno, apesar destas poderem ser refutadas por contra-exemplos, a sua validação parece depender da impossibilidade de alguém os conseguir encontrar e não da produção de uma prova matemática. Curiosamente, já no final do ano lectivo, enquanto o aluno 1 parece ter compreendido, claramente, que se formulam conjecturas a partir da análise de exemplos e de usar esta ideia na exploração de situações, o aluno 3 continua a justificar conjecturas recorrendo a casos particulares. O facto de ninguém na turma conseguir encontrar contra-exemplos para conjecturas que são formuladas parece continuar a bastar-lhe para ficar convencido acerca da sua validade.

O diálogo transcrito no episódio 3 revela que, nesta aula, os alunos colocaram questões com o objectivo de obter clarificações, ouviram-se uns aos outros, procuraram explicar o seu pensamento a outros e questionaram afirmações dos colegas quando não concordavam com elas. A professora participou neste diálogo desempenhando várias funções que não só contribuíram para legitimar este papel assumido pelos alunos como introduziram outros aspectos importantes à criação, na sala de aula, de uma cultura que pode favorecer o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Em particular, ajuda o aluno 3 a expressar o seu pensamento de modo a torná-lo mais claro, re-diz a sua fala (8), via repetição e expansão, iluminando, ao introduzir o plural "exemplos", um aspecto importante da discussão e, ao não corrigir a incorrecção na posição do aluno 3 (falas 15 e 16) mostra que o seu papel é o de moderar a discussão e não a de um avaliador que explica. Finalmente, a reacção que tem à fala 21 do aluno 3, ilustra a importância que concede ao facto dos fundamentos para os resultados que se enunciam não deverem basear-se no seu estatuto ou autoridade como professora.



## Considerações finais

Passado cerca de um ano desde o início do projecto reforça-se, em nós, a ideia de que o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática no âmbito do currículo existente, é uma tarefa morosa mas entusiasmante que, do ponto de vista do professor passa, necessariamente, por um investimento simultâneo numa rede complexa de relações tecidas entre (a) as tarefas matemáticas que se seleccionam, (b) as normas reguladoras da actividade matemática a desenvolver na sala de aula que se negociam e (c) os papéis e funções que se escolhem para o professor. O investimento apenas num destes pólos parece-nos condenado ao fracasso.

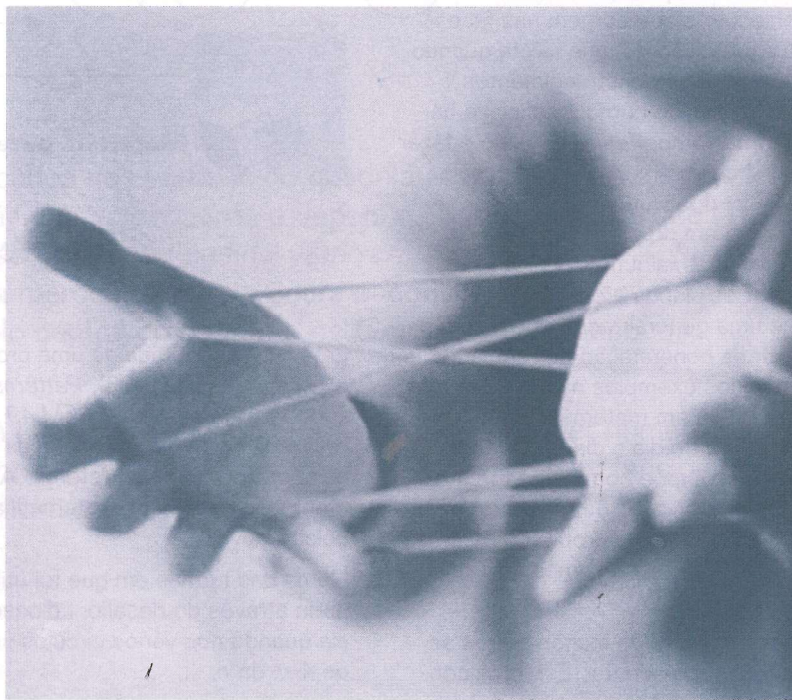
Embora considerando importante investir em competências matemáticas transversais aos vários temas curriculares dos programas do 8º ano de escolaridade, entre as quais pensamos estar a competência argumentativa cujo desenvolvimento é muito exigente em termos de tempo, não se queriam deixar de lado estes temas curriculares. Ao longo do projecto nem sempre foi fácil compatibilizar estas duas dimensões. Procurámos que as tarefas a propor aos alunos surgissem, aos seus olhos, como naturalmente articuladas com os temas que trabalhavam ou iriam trabalhar em determinado momento, tentando, assim, evitar que a experiência matemática por eles vivida nas aulas em que a Ana estava presente fosse considerada marginal relativamente ao desenvolvimento do seu trabalho nas restantes aulas. Esta parece ter sido uma boa opção. Além disso, se, por um lado, o trabalho realizado tem mostrado que os problemas e as tarefas de investigação são meios privilegiados para proporcionar boas discussões matemáticas, tem também revelado que mais importante do que escolher tarefas com esta ou aquela características são as estratégias e recursos usados pelo professor para orquestrar estas discussões de modo a estimular e facilitar a apresentação de explicações e justificações pelos alunos.

A negociação de normas sociais e sócio-matemáticas facilitadoras do

envolvimento dos alunos em actividades de argumentação na aula de matemática tem-se revelado um processo lento e não muito fácil, mas que continua a fazer sentido para toda a equipa do projecto constituindo um dos campos em que consideramos que é fundamental continuar a investir. A negociação do que conta como uma justificação matemática aceitável tem-se mostrado problemática nos casos em que esta justificação assume a forma de uma prova matemática de conjecturas de que os alunos estão convencidos da validade, relativamente às quais não é possível apresentar contra-exemplos, e em que a questão do porquê desta validade não lhes desperta curiosidade. Quanto ao processo de negociação de normas sociais há um exemplo que pode permitir iluminar aspectos relativos ao desenvolvimento deste processo. Na primeira aula do ano lectivo de 2002/2003, os alunos de uma das turmas, a pedido da professora, foram capazes de indicar quais os papéis que era esperado que desempenhassem na aula de matemática. Entre estes estava o exprimirem-se de forma a que todos ouvissem, a necessidade de justificarem raciocínios, a importância de tentarem compreender pontos de vista dos colegas, o não falarem apenas para a professora, etc. No

entanto, passados cerca de quinze dias, numa fase de discussão com toda a turma das conclusões a que tinham chegado a propósito de uma tarefa que lhes tinha sido proposta, muitos deles não conseguiram mobilizar este conhecimento em situação de modo a participarem da forma que eles próprios tinham considerado adequada. Esta constatação leva-nos a reforçar a ideia de que, embora sem menosprezar a possibilidade e até vantagem de, em determinados momentos, existirem conversas com os alunos em que o professor aborda, explicitamente, o que espera deles, a renegociação de normas parece, sobretudo, ocorrer por vias mais implícitas, nomeadamente através do modo como o professor capitaliza acontecimentos de sala de aula em que há transgressões às normas consideradas desejáveis.

Em todos estes processos o papel do professor é múltiplo e muito exigente. Por exemplo, há que "resistir a tentações" de validar ou invalidar, de imediato, argumentos e resoluções que vão sendo apresentados, há que não ceder, nas fases de discussão de uma tarefa, a apelos insistentes de determinados alunos para que se desloque aos seus lugares de modo a poderem mostrar-lhe, apenas a ele, as ideias que têm ou os resultados a





que chegaram, há que ajudar estes alunos a ultrapassarem o receio de se exporem aos olhos dos seus pares e assumirem, com naturalidade, as possibilidades de erro, há que dar visibilidade a determinadas posições e argumentos, procurando minimizar o risco desta atitude ser considerada como manifestação de preferência por determinados alunos, há que colocar questões e pedir esclarecimento, mostrando, simultaneamente, que se espera que os próprios alunos assumam também estes papéis.

Obviamente que esta tarefa não é fácil e mesmo quando se investe na globalidade das relações atrás referidas o professor debate-se com problemas e dilemas de vária ordem a que, frequentemente, em cima do acontecimento precisa de dar resposta. Neste âmbito há questões que permanecem em aberto e sobre as quais nos parece importante continuar a reflectir. Por exemplo, como ajudar os alunos a valorizarem as intervenções dos colegas e a tentarem encontrar sentido nelas? Como aproveitar o entusiasmo frequentemente proporcionado pela exploração de situações e descoberta de conjecturas para motivar, nos alunos, o desejo de explorarem caminhos que possam mostrar a validade das que resistiram a tentativas de falsificação e compreender o porquê dessa validade? Como lidar com a diversidade, por vezes numerosa, de conjecturas que surgem nas fases de exploração de uma tarefa quando são fortes os constrangimentos resultantes do currículo oficial e há que interromper esse trabalho e fazer escolhas para haja tempo, na sala de aula, dos alunos e professor se envolverem no processo de prova de, pelo menos, algumas delas? Como ajudar os alunos a compreenderem que uma generalização que fazem a partir da constatação de regularidades em vários exemplos não constitui uma prova em matemática quando em situações do dia a dia uma generalização se impõe com muita força e, frequentemente, com um estatuto de certeza, quando a propósito dela se evocam diversos exemplos da mesma natureza?

A estas questões muitas outras se poderão acrescentar. Estamos con-

victas que a reflexão sobre elas bem como sobre os problemas e dilemas que o professor enfrenta quando pretende envolver os seus alunos em actividades de argumentação matemática, poderá ajudar a encontrar pistas que nos permitam responder ao desafio difícil, mas possível, de conseguir que todos os alunos participem, com prazer, nestas actividades e as sintam como relevantes e essenciais à sua aprendizagem da matemática.

#### Nota

<sup>1</sup> A equipa do projecto dinamizou no ProfMat 2002 um grupo de discussão intitulado Reflectindo sobre a prática: A argumentação matemática na sala de aula. Algumas das ideias incluídas neste artigo foram sistematizadas no âmbito do trabalho de preparação desta sessão.

#### Referências bibliográficas

- Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: Um projecto curricular no 8º ano.*, Tese de Doutoramento. Universidade de Lisboa, Lisboa.
- Cobb, P., & Yackel, E. (1998). A constructivist perspectives of the mathematics classroom. Em F. Seeger & J. Voigt & U. Waschesch (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 158-190). Cambridge: Cambridge University Press.
- Forman, E. et. al. (1998). "You're going to want to find out which and prove it": Collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction*, 8, 527-548.
- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. Em P. Cobb & H. Bauersfeld. (Eds.). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* (pp. 229-269). Hillsdale, NY: Erlbaum.
- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal* (27), 29-63.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1994). *The development of young children's understanding mathematical argumentation.* Apresentação feita em AERA 1994.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458 - 477.
- Wood, T. (1999). Creating a context for argument in a mathematics classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 171-191.

Ana Maria Boavida  
ESE de Setúbal

Anabela Gomes  
EB 2,3 D. Luís de Mendonça Furtado

Silvia Machado  
Esc. Sec. de Casquilhos



## Material para a aula de Matemática

### Números em círculos

Esta tarefa adaptada de uma proposta de trabalho apresentada por Boavida, A & Guimarães, F. (1998), *Patterns, algebraic thinking and classroom interactions, Proceedings of the CIEAEM 49*: Escola Superior de Educação de Setúbal, foi realizada pelos alunos das duas turmas do 8º ano do projecto de investigação colaborativa a que se refere o Artigo publicado nesta revista intitulado Argumentação na aula de matemática: Olhares sobre um projecto de investigação colaborativa.

Numa das turmas em que foi utilizada esta tarefa, a exploração do padrão continuou através do desafio, colocado aos alunos, para investigarem o que acontecia quando nos vários círculos se colocavam múltiplos consecutivos de 2, de 3, de 4..., de  $n$ , ....