A travessia do deserto e as sucessões !

Cláudia Sofia Peça e Ana Cristina Santos

N. da R.: num número anterior de Educação e Matemática propusemos aos nossos leitores que tentassem estender a solução encontrada pela colega Ana Baltazar para o problema «A travessia do deserto», descobrindo porventura outras estratégias que melhorassem essa solução (ver Educação e Matemática, n.º 5, pág. 13). É com grande prazer que publicamos um relatório de duas alunas do 12.º ano (em 87/88) da professora Leonor Vieira, que no Clube de Matemática da Escola Secundária de Benfica, numa sessão sobre aquele problema, chegaram a uma estratégia que permite a travessia do deserto qualquer que seja a sua extensão. Parabéns para a Cláudia Sofia e para a Ana Cristina.

A travessia do deserto e as sucessões!

Ao resolvermos um problema que saíu na vossa revista, «Educação e Matemática» chegámos a uma solução diferente da sugerida na revista e mais completa que esta, pelo que estamos a escrever-vos.

O problema

Um homem tem de atravessar um deserto para entregar uma mensagem. Atravessar o deserto demora 9 dias. Cada homem apenas consegue transportar consigo comida suficiente para 12 dias. No local onde será entregue a mensagem não existe hipótese de obter alimentos.

Há dois homens disponíveis para a missão. Poderá a mensagem ser entregue e ambos os homens regressarem ao ponto de partida sem que lhes falte a comida? (Nota: Há possibilidade da comida ser enterrada na ida e desenterrada na volta)

Qual poderá ser a extensão do deserto se houver 3 ou 4 ou 5...homens disponíveis?

Solução do problema

Sendo **n** o número de homens disponíveis para fazer o percurso, verificamos que, para que o percurso seja máximo, devem os homens, um por um, ir voltando para trás e não como é sugerido na vossa resolução, em que todos os homens abandonam o percurso ao mesmo tempo à excepção do que o efectua até ao fim. Propomos assim que:

Sendo dois o número de homens disponíveis, o 1.º homem a voltar para trás deve ficar com alimento suficiente para regressar ao ponto de partida, dar alimento ao 2.º homem, de maneira a que este fique com o alimento máximo, ou seja, suficiente para 12 dias, e ainda enterrar no local alimento suficiente para que o 2.º homem possa voltar ao ponto de partida. Portanto:

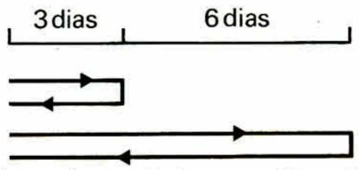
Supondo que o 1.º homem percorreu **x** dias, tendo ele inicialmente alimento para 12 dias, ficará então com **12 – x** de alimento, devido ao percurso já percorrido, a este ainda terá de retirar **2x**, o suficiente para que os dois homens possam regressar ao ponto de partida, metade do qual deixará enterrada no local, e mais **x** que dará ao 2.º homem para que este leve o máximo de alimento (12 dias), para assim ir mais longe.

Sendo assim,

$$12 - x - 2x - x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 3$$

Logo, o 1.º homem regressará após ter andado três dias; o 2.º homem terá alimento para andar 12 dias, 6 de ida e 6 de volta, será então:
$3 + 6 = 9$

Esquematizando:



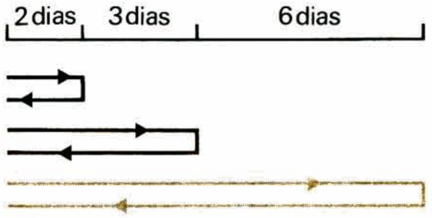
Sendo três o número de homens disponíveis, temos que:
Tendo o 1.º homem a voltar para trás percorrido **y** dias, ficará então com alimento para **12 – y** dias, a este ainda terá de retirar **3y**, o suficiente para que os três homens possam regressar ao início do percurso, **2y** dos quais ficam enterrados, e mais **2y** que dará aos outros **2** homens para que estes levem o máximo de alimento.

Sendo assim:

$$12 - y - 3y - 2y = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = 2$$

Logo, o 1.º homem regressará após ter andado 2 dias; como os dois homens restantes partem deste ponto ($y = 2$) com comida para 12 dias (máxima) pode resumir-se o resto do problema ao caso anterior (com 2 homens).

Assim, com três homens o percurso máximo será $9 + 2 = 11$ dias.
Esquematizando:



Generalizando para **n** homens, tendo o 1.º, antes de voltar para trás, andado **x** dias

$$12 - x - nx - (n - 1)x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6}{n}$$

Portanto, a solução do problema é

$$u_n = u_{n-1} + \frac{6}{n}$$

sendo
u_n percurso máximo para n homens
u_{n-1} percurso máximo para n – 1 homens.

Prova-se pelo princípio de indução matemática que

$$u_n = u_{n-1} + \frac{6}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k}$$

Juntamos um programa para auxiliar no estudo da sucessão.

NÚMERO DE HOMENS NECESSÁRIOS PARA UMA DADA EXTENSÃO DO DESERTO

```
10 LET t=0
20 FOR n=1 TO 100
30 LET t=t+6/n
40 PRINT n, t
50 NEXT n
```

N.º de homens	Extensão
1	6
2	9
3	11
4	12.5
5	13.7
6	14.7
7	15.557143
8	16.307143
9	16.97381
10	17.57381
11	18.119264
12	18.619264
13	19.080803
14	19.509374
15	19.909374
16	20.284374
17	20.637315
18	20.970648
19	21.286438
20	21.586438
21	21.872152
22	22.14488
23	22.405749
24	22.655749
25	22.895749
....	
83	30.01241
84	30.083838
85	30.154426
86	30.224194
87	30.293159
88	30.361341
89	30.428757
90	30.495424
91	30.561358
92	30.626575
93	30.691091
94	30.754921
95	30.818079
96	30.880579
97	30.924435
98	31.003659
99	31.064265
100	31.124265

Até ao Horizonte *(conclusão)*

A última — e definitiva — tentativa foi:
$r = 6370$ km $= 6370000$ m ; $h = 17$ m
$d^2 + r^2 = (r + h)^2$
$d^2 = r^2 + 2hr + h^2 - r^2$
$d^2 = 2 \times 17 \times 6370000 + 17^2$

na máquina : $17^2 = 289$; $34 \times 637 = 21658$
$d^2 = 216580000 + 289$
$d = 216580289$

Mas, na máquina, «não cabia» o número 216580289, para calcular a sua raíz quadrada ...

Depois de discutirmos as unidades, concluiu-se que estávamos a trabalhar em m^2 e que, para reduzir o número de algarismos, tínhamos que «tirar dois algarismos». De facto, para passar de m^2 para dam^2 temos que «andar duas casas para a esquerda».
na máquina: $\sqrt{2165803}$
$d \approx 1472$ dam ≈ 15 Km

Ou seja, se subirmos ao nosso farol e olharmos, até onde a vista alcança, para o mar (com um dia límpido, está bom de ver...), o horizonte está a 15 km de nós. Mas esses, são 15 km que não se podem percorrer — a não ser com os olhos: se nos metêssemos pelo mar dentro (pelo mar fora), ao fim de 15 km não chegaríamos ao horizonte ... e ainda bem!
