

O mundial de futebol e os aniversários

José Paulo Viana

De vez em quando surge-nos pela frente um problema que nos seduz, ou porque gostamos imediatamente do desafio que ele nos lança ou porque ao resolvê-lo descobrimos aspectos completamente inesperados. Um dos meus favoritos é o dos "Aniversários no campo de futebol":

Durante um jogo de futebol há 23 pessoas dentro do campo: 11 jogadores de cada lado e mais o árbitro. Qual é a probabilidade de, nesse grupo de pessoas, haver duas (pelo menos) que fazem anos no mesmo dia?

Leitor, se nunca ouviu falar neste problema, faça uma estimativa dessa probabilidade. Pense um bocadinho e, antes de continuar a ler, diga se lhe parece ser muito ou pouco provável haver duas pessoas no campo que fazem a sua festa de anos na mesma data.

Bem, temos apenas 23 pessoas, cada uma delas com 365 hipóteses de aniversário (sim, Celina, sim, eu sei que também se pode fazer anos a 29 de Fevereiro mas, para simplificar os cálculos, vamos apenas considerar

os outros 365 dias...). Praticamente toda a gente a quem esta questão é colocada pela primeira vez responde que a probabilidade é pequena. É que 23 datas em 365 possíveis não são lá muitas, não. A probabilidade de haver repetição não parece ser muito grande. Pelo contrário, "deve" ser pequena. A nossa intuição diz-nos que as possibilidades de haver aniversários repetidos não são lá muitas.

Passemos aos cálculos

Há, como sempre, vários processos de chegar ao resultado mas, em todos eles, é mais simples começar por calcular a probabilidade de não haver aniversários repetidos.

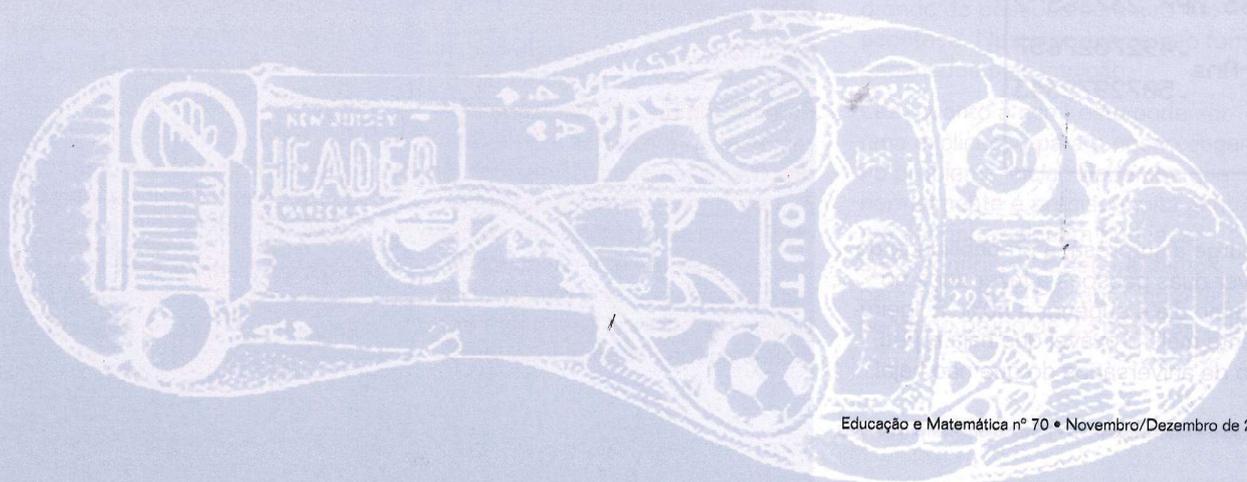
1º Processo

Vamos analisar os aniversários um de cada vez, de modo a não haver repetição.

O primeiro jogador pode fazer anos em qualquer dia. Dos 365 dias possíveis, servem-lhe todos: 365/365.

Chega o segundo jogador. Para não haver repetição, dos 365 dias só lhe

Neste artigo ilustra-se de uma forma particularmente interessante algumas situações probabilísticas em que a nossa intuição nos engana, evidenciando a necessidade de cidadãos estatisticamente literados.



servem 364, ou seja, 364/365.

Para o terceiro jogador, já só servem 363 dias: 363/365.

E assim sucessivamente, até ao 23º jogador, para o qual há 343 dias disponíveis: 343/365.

A probabilidade de não haver aniversários repetidos é então: $365/365 \times 364/365 \times 363/365 \times \dots \times 343/365$.

A probabilidade P de haver pelo menos duas pessoas a fazer anos no mesmo dia é o complementar deste valor: $P = 1 - 365/365 \times 364/365 \times 363/365 \times \dots \times 343/365$.

Não façamos este cálculo (que poderia dar um bocadinho de trabalho) e passemos a outra maneira de resolver o problema.

2º Processo

Para não haver aniversários repetidos, calculemos os casos possíveis e os casos favoráveis para o grupo de 23 pessoas.

Cada pessoa tem 365 possibilidades de dia de anos, logo os casos possíveis são 365^{23} .

Os casos favoráveis (para a não repetição) são todos os conjuntos de 23 datas diferentes, ou seja, ${}^{365}A_{23}$.

A probabilidade de não haver aniversários repetidos é então: ${}^{365}A_{23}/365^{23}$.

A probabilidade P de haver pelo menos duas pessoas a fazer anos no mesmo dia é o complementar deste valor: $P = 1 - {}^{365}A_{23}/365^{23}$.

Reparemos que esta expressão é equivalente à que obtivemos pelo primeiro processo.

Os cálculos podem ser feitos rapidamente com a calculadora.

```

365 nPr 23/365^23
3
.4927027657
1-Ans
.5072972343

```

E surge a surpresa: a probabilidade de haver duas pessoas a fazer anos no mesmo dia é superior a 50%. É ligeiramente mais provável que haja repetição de aniversários do que não haja!

Grupo G



Itália

Nº POS.	NOME	DATA NASCIM.	CLUBE	INTER.	GOLOS
1	GR BUFFON	28-01-1978	Juventus	26	0
2	D PANUCCI	12-04-1973	AS Roma	24	2
3	D MALDINI	26-06-1968	AC Milão	122	7
4	D COCCU	08-01-1977	FC Barcelona	13	0
5	D CANNAVARO	13-09-1973	Parma	58	0
6	M ZANETTI	14-04-1977	Inter Milão	4	0
7	A DEL PIERO	09-11-1974	Juventus	49	17
8	M GATTUSO	09-01-1978	AC Milão	13	1
9	A INZAGHI	09-08-1973	AC Milão	38	15
10	A TOTTI	27-09-1976	AS Roma	29	5
11	M DONI	01-04-1973	Atalanta	3	1
12	GR ABBIATI	08-07-1977	AC Milão	0	0
13	D NESTA	19-03-1976	Lazio SS	43	0
14	M DI BIAGIO	03-06-1971	Inter Milão	28	2
15	D IULIANO	12-08-1973	Juventus	16	1
16	M DI LIVO	26-07-1966	Florentina	38	0
17	M TOMMASI	17-05-1974	AS Roma	14	1
18	A DELVECHIO	07-04-1973	AS Roma	16	3
19	M ZAMBROTTA	19-02-1977	Juventus	23	0
20	A MONTELLA	18-06-1974	AS Roma	14	3
21	A VIERI	12-07-1973	Inter Milão	24	10
22	GR TOLDO	02-12-1971	Inter Milão	22	0
23	D MATERAZZI	19-08-1973	Inter Milão	7	0
Treinador		Giovanni Trapattoni			

Equador

Nº POS.	NOME	DATA NASCIM.	CLUBE	INTER.	GOLOS
1	GR CEVALLOS	17-04-1971	Barcelona SC	62	0
2	D POROZO	13-04-1974	Emelec	26	0
3	D HURTADO	16-08-1974	Barcelona SC	90	4
4					
5	M OBREGON	12-05-1972	LDU Quito	40	0
6	D GUERRON	12-10-1976	Deportivo Quito	23	0
7	M ASENSIO	26-04-1975	Barcelona SC	4	0
8	D GOMEZ	20-04-1972	Barcelona SC	8	1
9	A KAVEDES	24-10-1977	Barcelona SC	26	10
10	M AGUINAGA	09-07-1968	Necaxa	92	20
11	A DELGADO	23-12-1974	Southampton	46	21
12	GR IBARRA	08-09-1969	El Nacional	21	0
13					
14	M BURBANO	15-02-1969	El Nacional	18	0
15	D MARLON AYOVI	27-09-1971	Deportivo Quito	26	0
16	M CHALA	29-06-1971	El Nacional	64	6
17	D ESPINOZA	12-04-1977	Aucas	19	1
18	A CARLOS TENORIO	14-05-1979	Deportivo Quito	9	2
19	M MENDEZ	16-03-1979	Deportivo Quito	24	2
20	M EDWIN TENORIO	16-06-1976	Barcelona SC	33	0
21	M SANCHEZ	19-06-1974	Emelec	35	3
22	GR VITERI	12-12-1981	Emelec	0	0
23	D WALTER AYOVI	11-08-1979	Emelec	2	0
Treinador		Dario Gomes			

Os aniversários dos jogadores do Grupo G (In A Bola, 25 Maio 2002).

Este resultado vai completamente contra a nossa intuição. Como é que, havendo tantos dias possíveis para se fazer anos, é mais fácil encontrar repetições? Mais à frente tentaremos dar uma explicação para isto.

Notemos que um grupo de 23 pessoas é o menor em que a probabilidade de haver repetições ultrapassa 50%.

Os aniversários no Mundial 2002

Como o resultado é surpreendente (e há mesmo quem, depois de efetuados os cálculos, ache que se deve ter cometido algum erro), apetece logo ir verificá-lo experimentalmente. Uma hipótese simpática, para nós professores, seria ir à caderneta dos nossos alunos e, em cada turma, escolher os 23 primeiros e anotar as datas de nascimento.

No entanto, em Maio deste ano, nas vésperas de começar o Mundial de Futebol, lembrei-me que seria interessante aproveitar os jogadores dos 32 países participantes. Por uma excelente coincidência, cada país podia levar um conjunto de exactamente 23 jogadores: o ideal para este problema. Sabia também que os jornais desportivos costumam trazer alguns dados sobre os jogadores

participantes. Como semanalmente costumo jogar futebol com um grupo de amigos, alguns dos quais fanáticos deste desporto, expliquei-lhes o que iria fazer e pedi-lhes para que estivessem atentos e me arranjassem o que eu queria. Passados poucos dias, o António Madeira apareceu-me com as fotocópias de duas páginas de "A Bola" com os aniversários de todos os jogadores.

É sempre uma emoção partir para esta verificação. É que, mesmo sabendo o resultado teórico, continuamos a não acreditar verdadeiramente que apareçam repetições em cerca de metade das equipas.

O primeiro país da lista era a França. E começámos bem: Vieira e Zidane fazem ambos anos a 23 de Junho!

E continuámos. Com aniversários repetidos havia ainda: Dinamarca, África do Sul, Brasil, Polónia, Estados Unidos, Alemanha, Irlanda, Argentina, Nigéria, Suécia, Equador, Croácia, México, Japão e Tunísia.

Ou seja, em metade das equipas verificava-se o que procurávamos. Exactamente o valor esperado. Bela coincidência!

Mas ainda havia melhor. Em três dos países (Brasil, Polónia e Tunísia) havia dois pares de jogadores com o

Croácia

Nº POS.	NOME	DATA NASCIM.	CLUBE	INTER.	GOLOS
1	GR PLETIKOSA	08-01-1979	Hajduk Split	17	0
2	D SERIC	15-01-1979	Verona	8	0
3	D SIMUNIC	18-02-1978	Hertha Berlin	6	0
4	D TOMAS	06-03-1976	Vicenza	17	1
5	M RAPAIC	16-08-1973	Fenerbahce	23	1
6	D ZIVKOVIC	15-11-1975	Bayer Leverkusen	15	1
7	M VUGRINEC	24-03-1975	Lecce	21	7
8	M PROSINECKI	12-01-1969	Portsmouth	48	10
9	A SUKER	01-01-1968	Munich 1860	68	45
10					
11	A BOKSIC	21-01-1970	Middlesbrough	36	10
12	GR BUTINA	30-03-1974	Dinamo Zagreb	7	0
13	M STANIC	10-04-1972	Chelsea	43	7
14	M SOLDO	02-11-1967	Fstgarda	59	3
15	D SARIC	04-08-1972	Panathinaikos	25	0
16	M VRANJES	31-01-1980	Bayer Leverkusen	7	0
17	D JARNI	26-10-1968	Panathinaikos	78	1
18	A OLIC	14-09-1979	NK Zagreb	4	1
19	A VLAOVIC	07-08-1972	Panathinaikos	50	15
20	D SIMIC	12-11-1975	Inter Milão	48	1
21	D ROBERT KOVAC	06-04-1974	Bayern Munique	19	0
22					
23	GR VASILJ	06-07-1975	NK Zagreb	2	0
Treinador		Mirko Jozic			

México

Nº POS.	NOME	DATA NASCIM.	CLUBE	INTER.	GOLOS
1	GR PEREZ	01-02-1973	Cruz Azul	37	0
2	D GABRIEL DE ANDA	05-06-1971	Pachuca	15	1
3					
4	M MARQUEZ	13-02-1979	AS Monaco	36	4
5	D VIDRIO	23-08-1972	Pachuca	27	1
6	M TORRADO	30-04-1979	FC Sevilha	28	2
7	M MORALES	10-10-1975	Guadalajara	17	1
8	M GARCIA ASPE	11-05-1967	Puebla	108	22
9					
10	A BLANCO	17-01-1973	Valladolid	75	16
11	M LUNA	08-09-1974	Necaxa	15	1
12	GR SANCHEZ	21-09-1973	Guadalajara	22	0
13	M MERCADO	21-12-1968	Atlas	18	0
14	M VILLA	02-04-1973	America	46	0
15	A HERNANDEZ	22-12-1968	America	85	35
16	D CARMONA	22-08-1975	Toluca	56	0
17	A PALENCIA	28-04-1973	Espanhol	67	9
18	M JOHAN RODRIGUEZ	15-08-1975	Santos Laguna	14	1
19	M CABALLERO	05-02-1971	Pachuca	5	0
20	D BROWN	28-01-1979	Cruz Azul	8	0
21	A ARELLANO	08-05-1973	Monterrey	49	5
22	D ALBERTO RODRIGUEZ	01-04-1974	Pachuca	13	0
23	GR JORGE CAMPOS	15-10-1966	Pumas UNAM	123	0
Treinador		Javier Aguirre			

mesmo aniversário. Se um par já nos surpreende, dois pares deixam-nos de boca aberta! Mas, do ponto de vista das probabilidades, também isto era de esperar. Não vamos apresentar aqui os cálculos porque são um pouco complicados, mas a probabilidade de haver mais do que uma coincidência de aniversários num grupo de 23 pessoas é de cerca de 1/9. Portanto, neste conjunto de 32 equipas, o número esperado de países com dupla repetição é $32 \times 1/9 \approx 3,56$, ou seja 3 ou 4. Foi o que aconteceu!

É tão bonito ver as probabilidades a funcionar...

Quem faz a festa comigo?

Aproveitei o facto de ter as datas de nascimento destas $23 \times 32 = 736$ pessoas aparecidas ao acaso para investigar outro problema relacionado com aniversários:

Qual é a probabilidade de haver neste grupo alguém que faz anos no mesmo dia que eu?

Quantas pessoas é de esperar que apareçam com o mesmo dia de aniversário que eu?

Para responder à primeira pergunta, é novamente mais fácil calcular a probabilidade de não haver ninguém a fazer anos comigo.

A probabilidade de uma pessoa não fazer anos no mesmo dia que eu é $364/365$.

A probabilidade de nenhuma de duas pessoas fazer anos no mesmo dia que eu é $364/365 \times 364/365$.

Para a grupo das 736 pessoas, a probabilidade de nenhuma fazer anos no mesmo dia que eu é $(364/365)^{736}$.

A probabilidade de haver alguém a fazer anos comigo é: $1 - (364/365)^{736} \approx 0,867$.

$$\begin{aligned} (364/365)^{736} &= .132760881 \\ 1 - \text{Ans} &= .867239119 \end{aligned}$$

Ou seja, é bastante provável que isso aconteça (mais de 86%). Só falha, em média, uma vez em cada 7 ou 8.

E quantos jogadores é de esperar que façam a festa no mesmo dia que eu?

Basta multiplicar o número de jogadores pela probabilidade de terem nascido no mesmo dia que eu: $736 \times 1/365 \approx 2,016$.

Bem, deverá haver dois jogadores nestas condições.

E lá fui procurar.

Como esperado, havia quem festejasse comigo.

E quantos eram eles? Exactamente dois: o uruguaio Rodriguez e o brasileiro Edilson.

Ai, é tão bonito ver as probabilidades a funcionar...

Festa num grupo mais pequeno

Vimos que, num grupo de 736 pessoas, é muito provável (86,7%) que haja alguém a fazer anos no mesmo dia que nós. Se o grupo for menor, a probabilidade diminui, é claro. Então, podemos pôr a seguinte questão:

Qual é a menor dimensão de um grupo para que a probabilidade de haver alguém a fazer a fazer anos connosco seja superior a 50%?

Se o grupo procurado tiver N pessoas, terá de ser $1 - (364/365)^N = 0,5$ ou $(364/365)^N = 0,5$.

Aplicando logaritmos: $N \cdot \log(364/365) = \log 0,5$.

Podemos resolver rapidamente esta equação com a calculadora:

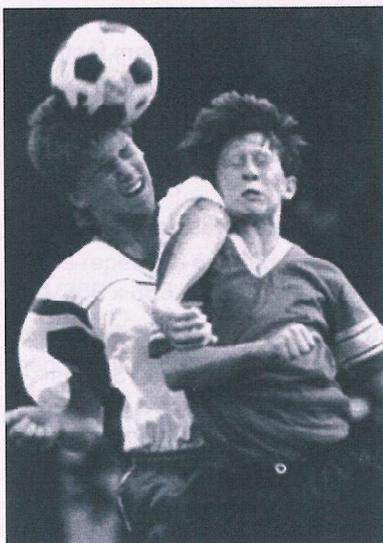
$$\begin{aligned} \log(0,5) / \log(364/365) &= \\ &= 252.6519888 \end{aligned}$$

$N \approx 253,65$

Só com 253 pessoas é que a probabilidade de haver alguém a fazer anos no mesmo dia que nós ultrapassa os 50%.

E é isto que a nossa intuição nos diz: é preciso um grupo relativamente grande de pessoas para que isto aconteça. Neste problema não fomos enganados pela intuição.

Ora, quanto a mim, esta pode ser uma explicação para o nosso engano no problema inicial. Sabemos que normalmente é preciso muita gente até encontrar alguém que faça anos connosco. E generalizamos para os outros. Portanto, num tão pequeno grupo de 23 pessoas "não



deve" haver aniversários repetidos. Esquecemos é que, para não haver repetições: eu não posso fazer anos com nenhum dos outros 22, nem o segundo do grupo com os restantes 21, nem o terceiro com 20 seguintes, e assim sucessivamente. Ou seja, são muitas coisas que não podem acontecer — cada uma delas pouco provável, mas são muitas...

Festa todos os dias?

Voltemos aos 736 jogadores do Mundial 2002.

Outra questão se pode colocar:

Será que neste grupo haverá festas de anos todos os dias?

Reparemos que o número de jogadores é ligeiramente superior ao dobro do número de dias do ano, portanto há gente mais do que suficiente para isso.

Que lhes parece? Será provável que isto aconteça?

Foi o que fui verificar.

Bem, há muitos dias sem ninguém a festejar o seu aniversário. São exactamente 49. Estamos ainda longe de preencher o ano todo.

Aliás, não há sequer um mês completo. Os melhores são Março, Agosto e Setembro, cada um deles com dois dias sem ninguém a fazer anos. O pior é Novembro, em que há 9 dias sem aniversários.

Calcular a probabilidade de todos os dias do ano serem dias de festa num grupo de 736 pessoas não é nada fácil de calcular.

Mas podemos colocar outra questão:

Em média, quantas pessoas é preciso juntar para ter pelo menos uma a fazer anos em cada dia?

Este é o famoso problemas das colecções: Para fazer uma colecção de N objectos que se vão obtendo aleatoriamente, em média quantos objectos é preciso juntar?

O problema foi exaustivamente estudado por matemáticos ao longo do tempo e a resposta obtém-se usando uma fórmula bastante simpática e simples mas cuja demonstração já não me lembro onde encontrei (e que não deve ser lá muito fácil). A média M de elementos de uma colecção para ela estar completa é

$$M = N \sum_{(k=1)}^N \frac{1}{k}$$

Portanto, para preencher todos os dias dos anos, em média, é preciso juntar um número de pessoas dado

por:

$$M = 365 \sum_{(k=1)}^{365} \frac{1}{k} = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{365})$$

Para fazer este cálculo podemos voltar a usar a nossa sempre útil calculadora gráfica:

```
sum(seq(1/X,X,1,
365))
6.478482256
Ans*365
2364.646023
```

Ou seja, é preciso juntar um grande grupo de pessoas. Em média, temos de arranjar um grupo de 2365 pessoas para que haja sempre alguém a fazer anos em cada dia.

Por fim, só mais algumas curiosidades sobre as datas de nascimento dos jogadores que participaram no Mundial de Futebol de 2002.

O mês com mais aniversariantes é Agosto (88) e com menos é Novembro (39).

Os dias com mais pessoas a festejar o seu aniversário são 23 de Junho, 2 de Agosto, 16 de Agosto e 15 de Outubro, todos eles com 7 jogadores.

E, atenção Celina, o guarda-redes sueco Kihlstedt faz anos a 29 de Fevereiro!

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira, Lisboa

Olímpiadas ibero-americanas de matemática

A equipa portuguesa presente nas Olimpíadas ibero-americanas de matemática, realizadas, em El Salvador, conseguiu duas medalhas de bronze e uma menção honrosa. Essas medalhas foram obtidas por Andreia Maria Hortense Gomes (aluna do 12º ano da escola secundária Frei Gonçalo de Azevedo, São Domingos de Rana) e por Domingos José Ramos Lopes (aluno do 10º ano da escola secundária da Gafanha da Nazaré); a menção honrosa foi atribuída a Luís Alexandre Meira Ferreira Pereira (aluno do 11º ano da escola secundária José Gomes Ferreira, Lisboa).