"Aprendamos a demonstrar, certamente, mas aprendamos também a conjecturar" – O legado de Pólya

Hélia Oliveira

O nome do matemático George Pólya está muito ligado à resolução de problemas, principalmente, através do seu livro mais divulgado, *How to solve it*. No entanto, o seu valioso contributo para a compreensão da actividade matemática e de como esta pode ser concretizada no ensino da Matemática, abrange muitos outros aspectos.

Pretendo através deste pequeno texto destacar algumas perspectivas de Pólya sobre os processos matemáticos envolvidos na actividade de invenção ou criação nesta ciência e que me parecem continuar a ter grande pertinência na actualidade.

O raciocínio plausível na Matemática

Para Pólya fora da Matemática todo o conhecimento é constituído por conjecturas, embora variando estas quanto ao seu grau de respeitabilidade e fidelidade. Deste modo, afirma que enquanto uma demonstração matemática envolve raciocínio dedutivo, a evidência de tipo indutivo de um físico ou a evidência documental de um historiador manifestam o raciocínio plausível. Considera que existe uma grande distância entre estes dois tipos de raciocínio: o primeiro é seguro, além de controvérsia e final; o segundo é incerto, controverso e provisório. No entanto, somente através do raciocínio plausível nos é possível adicionar novo conhecimento àquele que possuímos. Pólya destaca o papel central do raciocínio plausível na Matemática, dado que é aquele que os matemáticos utilizam quando fazem as suas descobertas.

Apesar de considerar a Matemática como o domínio do conhecimento, por excelência, em que se aprende o raciocínio dedutivo, Pólya argumenta que é também através do estudo desta ciência que existe uma oportunidade ímpar para aprender o raciocínio plausível. Para que o ensino da Matemática possa dar a conhecer também os aspectos que envolvem a criação do conhecimento matemático é essencial dar atenção às conjecturas (*guessing*) ou inferências plausíveis. Assim, afirma enfaticamente: "Aprendamos a demonstrar, certamente, mas *aprendamos também a conjecturar*" (1990a, p. vi).

Procurando evidenciar o paralelismo que é possível estabelecer entre estes dois tipos de raciocínio, Pólya afirma que no caso do raciocínio dedutivo é necessário saber distinguir entre uma prova e uma conjectura (*guess*) e entre uma demonstração válida e uma tentativa inválida. No caso do raciocínio plausível, é essencial saber distinguir uma conjectura de outra conjectura e uma conjectura mais razoável de uma outra menos razoável.

Este matemático dá uma atenção particular ao raciocínio de tipo indutivo, sendo um caso particular de raciocínio plausível, e que considera possuir funções semelhantes na investigação matemática e na pesquisa científica. A indução aparece, em Pólya, em associação com a experiência, a que confere extrema importância: "Aprendemos da experiência ou, pelo menos, deveríamos aprender da experiência. Fazer o melhor uso da experiência é um dos maiores empreendimentos do homem ..." (1990a, p. 3). Identifica a indução como o procedimento utilizado pelo cientista para lidar com a experiência. Tal como reconhece não existir um método para aprender o raciocínio plausível, também afirma não existirem regras para a indução, devendo esta ser considerada em estrita relação com a prática dos cientistas.

No livro *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics*, Pólya ilustra os processos envolvidos no pensamento matemático indutivo através da exploração de diversos exemplos. Alguns destes envolvem processos matemáticos bastante elementares como é o caso da Conjectura de Goldbach, a qual introduz de uma forma muito sugestiva:

> *A indução frequentemente começa com a observação. Um naturalista pode observar a vida dos pássaros, um cristalógrafo as formas dos cristais. Um matemático, interessado nas Teoria dos Números, observa as propriedades dos números inteiros 1, 2, 3, 4, 5, ...*
>
> *Se desejarmos observar a vida dos pássaros, com alguma possibilidade de obter resultados interessantes, teremos de estar, de algum modo, familiarizados com pássaros, interessados por pássaros, talvez até gostar de pássaros. Similarmente, se desejamos observar números, devemos estar interessados por eles, e, de alguma forma, familiarizados com eles. Devemos ser capazes de distinguir números pares e ímpares, conhecer os quadrados 1, 4, 9, 16, 25, ... e os primos (...). Mesmo com um conhecimento tão modesto poderemos ser capazes de observar algo interessante.*
>
> *Por algum acaso, deparamo-nos com as relações*
>
> $3 + 7 = 10,\ 3 + 17 = 20,$
>
> $13 + 17 = 30$
>
> *e notamos alguma semelhança entre elas. Ocorre-nos que os números 3, 7, 13 e 17 são primos. A soma de dois números primos é necessariamente um número par; de facto, 10, 20 e 30 são números pares. E os outros números pares? Comportam-se eles da mesma forma?* (1990a, p. 4)

Neste exemplo, põe em evidência um primeiro aspecto do processo indutivo: a observação. De seguida, passa a exemplificar o teste da conjectura através de mais alguns casos particulares. À medida que a conjectura vai resistindo ao teste, vai-se tornando mais credível e Pólya formula, então, um princípio que lhe parece fácil de aceitar:

> "Uma afirmação conjectural geral torna-se mais credível se é verificada num novo caso particular" (1990a, p. 7).

A *atitude indutiva*, que Pólya ilustra em muitos outros exemplos neste livro, tem como objectivo adaptar da melhor forma possível as nossas crenças à experiência. Afirma que essa atitude tem três predicados os quais constituem as qualidades morais do cientista. A primeira diz respeito à coragem intelectual necessária para estar disposto a rever qualquer das nossas crenças. A segunda, a honestidade intelectual, que se expressa na disposição para mudar uma crença quando existe uma razão convincente para tal. A terceira, a contenção sábia que se exige para não modificar uma crença sem um exame sério e sem uma boa razão.

Pólya preocupa-se igualmente em discutir a possibilidade da indução conduzir ao erro, interrogando-nos se seria mais apropriado explorar os casos em que a indução falhou ou, pelo contrário, os casos especiais em que esta funcionou. Pegando no exemplo da cristalografia afirma:

> "o estudo das pedras preciosas é, naturalmente, mais atractivo do que os das pedras comuns e, acima de tudo, foram muito mais as pedras preciosas do que as pedras comuns que conduziram ao estudo da magnífica ciência da cristalografia" (1990a, p. 11).

Portanto, também os estudos das excepções, dos casos em que a indução conduziu a um sucesso, parece-lhe merecer maior atenção do que aqueles em que o processo indutivo não foi bem sucedido. A este respeito cita Lagrange, para responder àqueles que poderão afirmar que é por acidente que depois de várias conjecturas falhadas se chega uma certa:

> "tais acidentes acontecem apenas a pessoas que os merecem" (1990a, p. 55).

O raciocínio plausível e o ensino da Matemática

Afirmando o lugar central do raciocínio plausível na actividade criadora dos matemáticos, Pólya defende que este deverá também ser integrado no ensino da Matemática. Dado considerar que este tipo de raciocínio se aprende pela prática e pela imitação. As suas obras estão repletas de exemplos de descobertas matemáticas e da sua génese, colocando em destaque as sucessivas conjecturas que foram sendo formuladas e os processos de raciocínio matemático utilizados. Particularmente, nos livros *Plausible Reasoning*, traça possíveis histórias de diversas descobertas, procurando enfatizar:

> "os motivos subjacentes à descoberta, as inferências (...), em síntese, tudo aquilo que merece imitação" (1990a, p. vii).

É interessante que este livro reflecte também a experiência de Pólya como professor. Nas aulas colocava muitas vezes perguntas do tipo: "Bem, o que fariam nesta situação?". As reacções dos seus alunos a estas questões foram integradas em várias passagens do texto, levando-o, até mesmo, a modificar a versão original.

Este matemático não menospreza o valor do ensino do raciocínio dedutivo, defendendo, inclusivamente, que os dois tipos de raciocínio são complementares e que devem ser ensinados em paralelo. Para tal, julga tornar-se necessário que o professor evidencie perante os alunos que a actividade de conjecturar no domínio da Matemática pode ser, igualmente, sensata, respeitável e responsável.

Contudo, Pólya observava que a realidade no ensino da Matemática era muito diferente daquilo que preconizava. Para muitos alunos a Matemática constituía um conjunto de regras rígidas e que decorria da forma como os professores a apresentavam: um sistema de provas rigorosas. Esta visão acerca da Matemática encontra-se, segundo Pólya, muito distante daquilo que é a actividade do matemático que faz investigação, dado que para este,

> "a Matemática pode por vezes assemelhar-se a um jogo de adivinhar (*guessing*): tem de intuir (*guess*) um problema matemático antes de o provar, tem de intuir (*guess*) a ideia da prova antes de se envolver nos detalhes" (1990b, p. 158).

Deste modo, também o ensino deveria preparar os alunos para a invenção matemática, mas como menciona, "para os mais e os menos inteligentes" (idem).

Embora afirmando a importância do raciocínio dedutivo, argumenta que existem situações em que o ensino da conjectura deve predominar sobre o da demonstração, como é o caso do ensino do cálculo para os cursos de engenharia. Pela sua própria experiência, sabe que é difícil expor estes alunos às demonstrações puras, por isso considera mais favorável apresentar-lhe as demonstrações incompletas e mostrar-lhe, através de exemplos e analogias, a plausibilidade do resultado. Deste modo, defende que estas semi-provas, sendo bem sustentadas, poderão ter um efeito educativo nos alunos, coisa que é impossível conseguir através de um ensino dogmático.

Pólya reconhece que não existe um método para ensinar a conjecturar, e que se trata mesmo de algo difícil de ensinar. Por isso, através dos exemplos que apresenta pretende auxiliar o professor nessa tarefa. Contudo, alerta para que o sucesso do professor a este nível depende muito da sua própria experiência real, dado que não é expectável que este consiga

> "fazer os seus alunos compreender aquelas coisas que ele próprio ainda não entendeu" (1990b, p. 160),

e chama à responsabilidade a formação de professores.

Fica, pois, o desafio de Pólya de dar lugar ao raciocínio plausível nas aulas de Matemática, tendo a confiança de que dessa forma não estaremos a ensinar uma Matemática menos rigorosa ou de menor importância mas a proporcionar aos alunos uma experiência matemática mais completa e mais realista.

Referência bibliográficas

Pólya, G. (1990a). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics* (edição original de 1954). Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1990b). *Mathematics and plausible reasoning: Patterns of plausible reasoning* (edição original de 1954). Princeton: Princeton University Press.

Hélia Oliveira
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

PISA — Estudo internacional sobre Literacia Matemática

PISA é a abreviatura de Programme for International Sudent Assessment, da responsabilidade da OCDE. Como se pode ler no Relatório Nacional, divulgado em Dezembro de 2001, "O PISA é um estudo internacional sobre os conhecimentos e as competências dos alunos de 15 anos realizado em vários países industrializados".

A recolha de informação do primeiro ciclo deste estudo teve lugar no ano 2000 e envolveu cerca de 265 000 alunos de 32 países.

Registam-se as suas intenções explícitas na abertura do referido relatório.

"O PISA procurou avaliar de uma nova forma o desempenho dos alunos:

- a capacidade de os jovens usarem os seus conhecimentos e as suas competências na resolução de problemas da vida real e não especificamente de acordo com um currículo escolar.
- a literacia em leitura, matemática e ciências. Neste ciclo do Pisa a ênfase foi posta no domínio da leitura a que corresponderam mais itens do que nos outros domínios. A escala utilizada em cada uma das literacias foi construída de forma a que, no conjunto dos países da OCDE, a média fosse de 500 pontos e que cerca de dois terços dos alunos tivessem entre 400 e 600 pontos.
- a compreensão dos conceitos fundamentais, o domínio de certos processos e a aplicação dos seus conhecimentos e das suas competências em diferentes situações.
- as atitudes e as perspectivas destes alunos face aos estudo."

Após este primeira fase do PISA, seguir-se-á uma segunda fase, em 2003, com maior incidência em literacia matemática, e uma terceira fase, em 2006, com maior incidência em literacia científica.

Em Portugal, a entidade responsável pelo PISA é o GAVE. Este gabinete elaborou o Relatório Nacional que está disponível em http://www.gave.pt/pisarel.htm.

Os relatórios internacionais estão disponíveis em: http://www.pisa.oecd.org e http://www.pisa.oecd.org/pisa/math.htm.