Números Pitagóricos

Egídio Pereira, Escola Secundária Jaime Moniz (Funchal)

Chamam-se quadrados perfeitos aos números que são o quadrado de um número natural.

Os quadrados perfeitos são 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...

Um problema muito simples é descobrir um quadrado perfeito que seja a soma de dois quadrados perfeitos. Por exemplo, 25 ou 100 resolvem o problema porque $9+16=25$ ($3^2+4^2=5^2$) e $36+64=100$ ($6^2+8^2=10^2$). Um problema muito mais complicado é descobrir quais os quadrados perfeitos que são a soma de outros dois quadrados perfeitos.

Como $3^2+4^2=5^2$ diz-se que 3, 4 e 5 formam um terno de números pitagóricos. Curiosamente, se multiplicarmos aqueles números por um qualquer número natural obtemos também um terno de números pitagóricos: multiplicando por 2, temos 6, 8, 10, multiplicando por 3, temos 9, 12 e 15, etc.

Os números 3, 4 e 5 dizem-se números pitagóricos primitivos (o seu máximo divisor comum é 1), enquanto que, por exemplo, 6, 8 e 10 são números pitagóricos derivados.

Existe uma interpretação geométrica para aquilo que dissemos anteriormente e que passamos a explanar.

Se os catetos dum triângulo rectângulo medem 3 e 4, então a hipotenusa mede 5, devido ao Teorema de Pitágoras ($3^2+4^2=5^2$). O problema inicial pode, então, ser transformado no seguinte:

Quais os triângulos rectângulos cujos lados têm medidas que são números naturais?

Um triângulo cujos lados meçam 3, 4 e 5 está nas condições anteriores, o mesmo acontecendo com um triângulo em que os lados meçam 3n, 4n e 5n.

Os alunos que já deram casos de semelhança de triângulos podem facilmente chegar à conclusão que todos os triângulos referidos no parágrafo anterior são semelhantes. Afinal, ao multiplicarmos as medidas dos lados pelo mesmo número natural, estamos a obter ampliações do triângulo original (triângulos maiores com a mesma forma).

Haverá ainda outros triângulos rectângulos em que as medidas sejam números naturais?

Claro que sim! Verificamos, por exemplo, que $5^2+12^2=13^2$, pelo que existe um triângulo rectângulo de lados 5, 12 e 13.

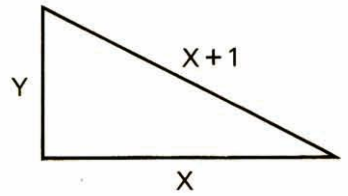
A partir do triângulo anterior podemos obter uma infinidade de triângulos semelhantes entre si; basta que os lados sejam 5n, 12n e 13n.

Haverá ainda outros?

Para resolver este problema temos de começar tudo de novo.

É claro que, num triângulo rectângulo, a hipotenusa é o maior dos lados. Como queremos que todas as medidas sejam números naturais, se um dos catetos for x o menor valor que a hipotenusa pode tomar é $x+1$.

Temos então:



Aplicando o Teorema de Pitágoras temos:

$$y^2+x^2=(x+1)^2 \Longleftrightarrow y^2+x^2=x^2+2x+1$$

Obtemos assim a equação $y^2=2x+1$ que relaciona os comprimentos dos catetos.

$2x+1$ tem de ser um quadrado perfeito (y^2), maior que 1 e, além disso, é um número ímpar ($2x$ é par, $2x+1$ é ímpar). Os quadrados perfeitos ímpares maiores que 1 são: 9, 25, 49, 81, ...

Para $2x+1=9$ vem $x=4$, $y=3$, $x+1=5$
Para $2x+1=25$ vem $x=12$, $y=5$, $x+1=13$
Para $2x+1=49$ vem $x=24$, $y=7$, $x+1=25$
Para $2x+1=81$ vem $x=40$, $y=9$, $x+1=41$

Analisemos os resultados anteriores! É claro que y varia de 2 em 2 (y^2 é um quadrado perfeito ímpar). Quanto a x, começa por aumentar 8, depois 12, depois 16, 20, 24, ...

Os próximos valores serão:
$x=60$, $y=11$, $x+1=61$
$x=84$, $y=13$, $x+1=85$
$x=112$, $y=15$, $x+1=113$

Para y é muito fácil encontrar uma expressão: $y=2n+1$ ($n \in \mathbb{N}$).

E para x? Se a expressão que dá o valor de x for um polinómio do 2º grau na variável n, então para $n=1$ deve tomar o valor 4, para $n=2$ o valor 12 e para $n=3$ o valor 24.

Dado o polinómio
$P(n)=an^2+bn+c$, temos:

$$\begin{cases} P(1)=4 \\ P(2)=12 \\ P(3)=24 \end{cases}$$

donde se obtém

$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ 4a+2b+c=12 \\ 9a+3b+c=24 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema vem $a=2$, $b=2$ e $c=0$. Logo $P(n)=2n^2+2n$.

Resumindo:

y	x	x+1
3	4	5
5	12	13
7	24	25
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$2n+1$	$2n^2+2n$	$2n^2+2n+1$
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Obtivemos, assim, uma infinidade de triângulos rec tângulos não semelhantes em que as medidas dos lados são números naturais.

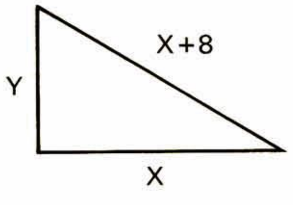
A partir de cada um desses triângulos podemos obter uma infinidade de triângulos semelhantes entre si multiplicando todos os lados por r.

Catetos		Hipotenusa
ry	rx	$r(x+1)$
$(2n+1).r$	$(2n^2+2n).r$	$(2n^2+2n+1).r$

É claro que podemos perguntar se ainda haverá outros triângulos nas condições pedidas. A resposta é afirmativa!

De facto, apenas considerámos até agora os casos em que a hipotenusa media mais uma unidade que o maior dos catetos.

O caso geral será:



Pelo Teorema de Pitágoras:

$x^2+y^2=(x+a)^2 \Longleftrightarrow x^2+y^2=x^2+2ax+a^2 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow y^2=a(2x+a)$.

O problema já foi resolvido para $a=1$. Se $a=2$ vem $y^2=2(2x+2) \Longleftrightarrow y^2=4(x+1)$, donde se conclui que $x+1$ é um quadrado perfeito e que y é um número par; se x fosse par teríamos que y, x e $x+2$ eram todos pares, pelo que não havia novas soluções (essas soluções obtinham-se do caso $a=1$, multiplicando todos os lados por 2); logo x deve ser um número ímpar e $x+1$ um quadrado perfeito par.

$x+1=4 \Rightarrow x=3,\ x+2=5,\ y=4$
$x+1=16 \Rightarrow x=15,\ x+2=17,\ y=8$
$x+1=36 \Rightarrow x=35,\ x+2=37,\ y=12$
$x+1=64 \Rightarrow x=63,\ x+2=65,\ y=16$

Resumindo:

y	x	x+2
4	3	5
8	15	17
12	35	37
16	63	65
...	...	...
4n	$4n^2-1$	$4n^2+1$
...	...	...

Para a=3 vem:

$y^2=3(2x+3)$. Logo $y^2=\dot{3}$, o mesmo acontecendo com y. Por outro lado $2x+3=\dot{3}$, donde se conclui que $2x=\dot{3}$ e que $x=\dot{3}$. Logo x, $x+3$ e y são múltiplos de 3 pelo que para $a=3$ não existem números pitagóricos primitivos.

Para a=4:

$y^2=4(2x+4)$; logo y é par, $2x+4$ é quadrado perfeito par. Logo $2(x+2)$ é quadrado perfeito par, pelo que $x+2$ e x são pares. Neste caso também não há novas soluções.

Para a=5:

$y^2=5(2x+5)$. Daqui concluimos que $y=\dot{5}$ e $2x+5=\dot{5}$. Logo $2x=\dot{5}$ e $x=\dot{5}$. Então x, $x+5$ e y são múltiplos de 5, pelo que não há novas soluções.

Para a=6 e para a=7 também não obtínhamos novas soluções.

Para a=8:

$y^2=8(2x+8)$. Logo $y^2=16(x+4)$, donde se conclui que y é par e que $x+4$ é quadrado perfeito. Se x for par, temos que x, $x+8$ e y são todos pares pelo que só pode haver novas soluções se x for ímpar. Se x é ímpar, então $x+4$ é um quadrado perfeito ímpar.

$x+4=9 \Rightarrow x=5,\ x+8=13$ e $y=12$
$x+4=25 \Rightarrow x=21,\ x+8=29$ e $y=20$
$x+4=49 \Rightarrow x=45,\ x+8=53$ e $y=28$
$x+4=81 \Rightarrow x=77,\ x+8=85$ e $y=36$

Resumindo:

y	x	x+8
12	5	13
20	21	29
28	45	53
36	77	85
...	...	...
$8n+4$	$4n^2+8n-7$	$4n^2+8n+1$
...	...	...

Para a=9:

$y^2=9(2x+9)$, donde vem que $2x+9$ é quadrado perfeito ímpar.

$2x+9=25 \Rightarrow x=8,\ x+9=17,\ y=15$

$2x+9=49 \Rightarrow x=20,\ x+9=29,\ y=21$

$2x+9=81 \Rightarrow x=36,\ x+9=45,\ y=27$

$2x+9=121 \Rightarrow x=56,\ x+9=65,\ y=33$

Resumindo:

y	x	x+9
15	8	17
21	20	29
27	36	45
33	56	65
...	...	...
$6n+9$	$2n^2+6n$	$2n^2+6n+9$
...	...	...

Se continuássemos a atribuir valores a **a**, iríamos verificar que de $a=10$ até $a=17$ não obtínhamos novas soluções, ao contrário do que acontece para $a=18$. Nesta altura torna-se pertinente perguntar:

Afinal para que valores de a obtemos novas soluções?

Uma primeira tentativa de resposta pode ser a seguinte: Suponhamos que **a** é um número primo diferente de 2. Da igualdade $y^2=a(2x+a)$ vem que $y^2=\dot{a}$, pelo que $y=\dot{a}$; por outro lado $2x+a=\dot{a} \Rightarrow 2x=\dot{a} \Rightarrow x=\dot{a}$. Então y, x e $x+a$ são múltiplos de **a** pelo que as soluções podem ser obtidas do caso $a=1$, multiplicando todos os lados por **a**. Concluimos, assim, que, se **a** é primo, só há novas soluções para $a=2$.

Suponhamos, agora, que **a** não é primo. Temos dois casos: **a** não é uma potência de 2 ou **a** é uma potência de 2.

Suponhamos que **a** não é uma potência de 2.

Então **a** pode ser decomposto num produto de factores primos em que, pelo menos, um dos factores é diferente de 2. Então $a=2^{\beta_0}p_1^{\beta_1}\ldots p_r^{\beta_r}$, onde β_0, eventualmente, pode ser zero, $\beta_1,\ldots,\beta_r$ são números naturais e os factores 2, $p_1,\ldots, p_r$ são números primos distintos dois a dois. Suponhamos que β_1 é ímpar:

$a=p_1^{2m+1}.q$ (onde p_1 não divide q), ou seja $a=p_1^{2m}.p_1q$. Da igualdade $y^2=a(2x+a)$ obtemos:

$y^2=p_1^{2m}p_1q(2x+p_1^{2m}.p_1q)$.

Como p_1^{2m} é quadrado perfeito $p_1q(2x+p_1^{2m}p_1q)$ tem de ser quadrado perfeito. Como p_1 não divide q, concluimos que $2x+p_1^{2m}.p_1q$ é múltiplo de p_1, pelo que $2x=\dot{p}_1$ e $x=\dot{p}_1$ (porque p_1 é diferente de 2). Então $y=\dot{p}_1$, $x=\dot{p}_1$ e $x+a=\dot{p}_1$, pelo que, neste caso, não obtemos novas soluções. Podemos, então, concluir que só pode haver novas soluções se β_1 for par. O mesmo se pode concluir para os restantes expoentes. Então, na decomposição de **a** em factores primos, os factores diferentes de 2 aparecem um número par de vezes. Só nos interessa analisar os casos em que $a=2^{\beta_0}p_1^{2m_1}\ldots p_r^{2m_r}$, o que corresponde a afirmar que **a** é quadrado perfeito ou **a** é o dobro dum quadrado perfeito.

Nos casos $a=4$ e $a=16$ vimos que não havia novas soluções, pelo que é de suspeitar que isso aconteça quando **a** é um quadrado perfeito par. Vejamos que assim é.

Seja $a=(2k)^2=4k^2$. Como $y^2=a(2x+a)$, vem $y^2=4k^2(2x+4k^2)$. Logo $y^2=\dot{4}$; $y=\dot{2}$; $2x+4k^2$ é quadrado perfeito par. Logo $2x+4k^2=\dot{4}$, donde $2x=\dot{4}$ e $x=\dot{2}$.

Concluimos, então, que y, x e $x+a$ são pares, pelo que não há novas soluções, quando **a** é um quadrado perfeito par.

Em face do exposto podemos concluir que só pode haver novas soluções nos casos em que **a** é um quadrado perfeito ímpar ou **a** é o dobro dum quadrado perfeito.

Resumindo:

1º caso: a é quadrado perfeito ímpar

a	y	x	x+a
1	$2n+1$	$2n^2+2n$	$2n^2+2n+1$
9	$6n+9$	$2n^2+6n$	$2n^2+6n+9$
25	$10n+25$	$2n^2+10n$	$2n^2+10n+25$
49	$14n+49$	$2n^2+14n$	$2n^2+14n+49$
...	...	...	...

Ou, de maneira mais sugestiva:

a	y	x	x+a
1	$(n+1)^2-n^2$	$2n(n+1)$	$(n+1)^2+n^2$
9	$(n+3)^2-n^2$	$2n(n+3)$	$(n+3)^2+n^2$
25	$(n+5)^2-n^2$	$2n(n+5)$	$(n+5)^2+n^2$
49	$(n+7)^2-n^2$	$2n(n+7)$	$(n+7)^2+n^2$
...	...	...	...
$(2j-1)^2$	$(n+2j-1)^2-n^2$	$2n(n+2j-1)$	$(n+2j-1)^2+n^2$
...	...	...	...

2.º caso: a é o dobro dum quadrado perfeito

a	y	x	x+a
2×1^2	$4n$	$4n^2-1$	$4n^2+1$
2×2^2	$8n+4$	$4n^2+4n-3$	$4n^2+4n+5$
2×3^2	$12n+12$	$4n^2+8n-5$	$4n^2+8n+13$
2×4^2	$16n+24$	$4n^2+12n-7$	$4n^2+12n+25$
...	...	...	...

ou

a	y	x	x+a
2×1^2	$2\times2n\times1$	$(2n)^2-1^2$	$(2n)^2+1^2$
2×2^2	$2(2n+1)\times2$	$(2n+1)^2-2^2$	$(2n+1)^2+2^2$
2×3^2	$2(2n+2)\times3$	$(2n+2)^2-3^2$	$(2n+2)^2+3^2$
2×4^2	$2(2n+3)\times4$	$(2n+3)^2-4^2$	$(2n+3)^2+4^2$
...	...	...	...
$2j^2$	$2(2n+j-1)j$	$(2n+j-1)^2-j^2$	$(2n+j-1)^2+j^2$
...	...	...	...

Agora é fácil concluir que os números pitagóricos são todos da forma $(p^2+q^2)r$, $(p^2-q^2)r$ e $2pqr$ com p, q, r $\in \mathbb{N}$ e $p>q$.

Publicações e Programas de Computador
Envio pelo Correio

- as publicações e programas disponíveis são os que vêm anunciados **neste número da revista**, sob os títulos
  — *Publicações APM*
  — *Publicações e Programas Educacionais do Projecto Minerva, Núcleo da FCUL.*
- fotocopie e **preencha** uma ficha (ver abaixo; utilize mais do que uma ficha se for necessário; note que o envio de software tem porte fixo).
- no caso de Software, não deixe de indicar, além do título, **a referência** (51, 52, etc.) respectiva e a **marca e modelo do computador** em que vai utilizar os programas.
- envie a ficha, juntamente com um cheque ou vale postal em nome da **Associação de Professores de Matemática** e no **valor total** calculado, para
  Paulo Abrantes
  Faculdade de Ciências
  Av. 24 de Julho, 134 - 4.º
  1300 Lisboa
- escreva a indicação «pedido de publicações» no sobrescrito.

Títulos publicações ou software	nº de ex.	preço unitário (*)	custo publicações	custo software
SÓCIO DA APM ☐ Nº ☐		subtotais ⟶		
NÃO SÓCIO ☐	portes do correio	pub. 15%	+	
(assinalar com uma cruz)		software fixo 120$00		+
Nome		totais parciais	(1)	(2)
Morada		valor total ((1) + (2)) ⟶		
Código Postal		Para uso da APM	Pedido recebido em	
Data do pedido		ass.:	Respondido em	

(*) note bem: as publicações da APM têm custos unitários diferentes para sócios e não sócios da APM