O problema deste número

Cubinhos e Tinta Verde

Com vários cubinhos iguais e de aresta 1 construiu-se um cubo grande. Depois, algumas das faces do cubo grande foram completamente pintadas de verde. Quando se voltou a desmanchar o cubo grande, havia 24 cubinhos que não tinham nenhuma face verde.

Quantos cubinhos havia no total e quantas faces do cubo grande foram pintadas?

(Inspirado num problema do Math Forum – Respostas até 30 de Setembro)

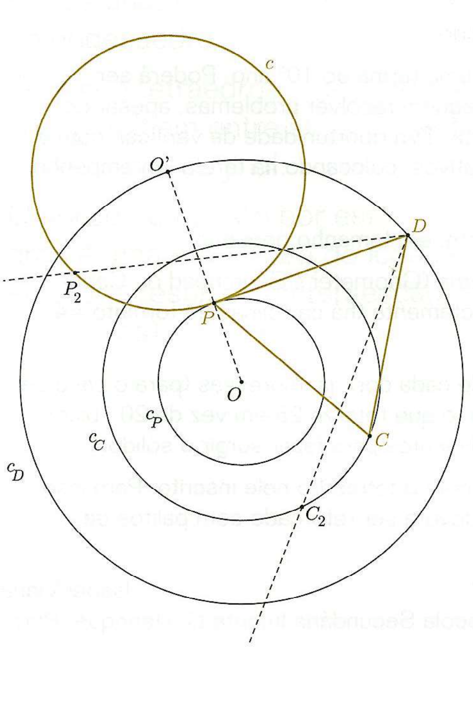
As Jogadoras de Basquete

O problema correspondente ao número 66 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Três jogadoras estão num campo de basquete.
A Paula está a 3 metros do centro do campo, a Cristina está a 5 e a Dulce está a 8.
As distâncias entre elas são absolutamente iguais. Qual é essa distância?

Tivemos apenas 11 respostas:

Armando Fernandes (Aveiro), Augusto Taveira (Faro), Eduardo Veloso (via internet), Fátima Cardoso (Moimenta da Beira), Graça Braga da Cruz (Ovar), Helder Martins (Lisboa), João Barata (Castelo Branco), João Maria Oliveira (Cartaxo), Manuela Ribeiro (Mem Martins), Paula Garção (Amadora) e Paula Gomes (Nogueiró).



Quase todas as resoluções usaram um programa de geometria dinâmica (Cabri ou GSP). Este é o típico problema que *apetece* resolver com estes programas. Depois, quase todos tentaram (e alguns conseguiram) encontrar uma justificação analítica para o resultado encontrado (ou não fôssemos nós matemáticos…).

A resposta do Eduardo foi a mais curta:

Resposta ao problema do trimestre E&M 66: 7.
http://www.apm.pt/gt/gtg/ce2002/paginas/javas/problemarita.html
Um abraço.

E naquele endereço lá estava a resolução, em GSP, do problema.

Mas demos a palavra à Graça, que conseguiu apresentar o processo mais simples (ou menos complicado…):

Consideremos três circunferências c_P, c_C e c_D de centro em O (o centro do campo de basquete) e com raios 3, 5 e 8. Consideremos como posição da Dulce um ponto D em c_D e C_2 uma possível posição da Cristina em c_C. Construamos P_2 de modo que o triângulo DC_2P_2 seja equilátero.

Utilizando o GSP construímos o lugar geométrico dos pontos P_2 quando C_2 se desloca na circunferência c_C. O que observamos leva-nos a conjecturar que tal lugar geométrico se trata de uma circunferência congruente com c_C.

A demonstração é simples: P_2 é o transformado de C_2 numa rotação de centro D e amplitude 60°, $R(D,60°)$. Quando C_2 descreve a circunferência c_C, a rotação $R(D,60°)$ transforma C_2 em P_2 e c_C em c, circunferência congruente com c_C e cujo centro é o transformado do centro de c_C por $R(D,60°)$. A intersecção de c com c_P (se existir) define o vértice P (posição da Paula) do triângulo pedido. Para determinar C (posição da Cristina) em c_C basta construir o transformado de P na rotação inversa da considerada, ou seja, $R(D,-60°)$.

Como as três circunferências são concêntricas e o raio da maior é igual à soma dos raios das menores $(8=5+3)$, a circunferência c é tangente a c_P, sendo P o ponto de tangência (solução única).

Sendo O o centro das três circunferências do nosso problema, o centro de c é O', transformado de O por $R(D,60°)$. Os pontos O, O' e P são colineares e os ângulos POD e $O'OD$ são iguais, com amplitude 60°.

Para determinar $\overline{PD}$, basta aplicar o teorema de Carnot ao triângulo POD:

$$\overline{PD}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OP}^2 - 2\overline{OD}\cdot\overline{OP}\cdot\cos 60°$$

donde $\overline{PD} = 7$.

A Fátima, a Manuela e o Helder colocam as três circunferências num referencial e depois escrevem as equações que estabelecem a igualdade de distâncias entre as três jogadoras. Resolvem depois o sistema destas equações com radicais. O Helder, depois de substituir variáveis, de elevar ao quadrado e simplificar, chega a uma equação do 3° grau numa variável. E como encontra ele as soluções? Simples: *utilizo a calculadora gráfica e confirmo analiticamente por substituição directa na expressão simplificada.*

Com estas pistas, querem tentar também a resolução analítica?

Materiais para a aula de Matemática

Um sólido composto por cinco tetraedros

A tarefa proposta — Um sólido composto por cinco tetraedros — foi adaptada de uma actividade apresentada por Francis Dupuis na revista francesa *Tangente* de Fevereiro/Março de 2000, intitulada *Cinq Tétraèdres imbriqués.*

Estava-se em 2000, Ano Mundial da Matemática, e a escola estava envolvida num projecto que incluía a construção de um sólido composto por dois tetraedros, a Stella Octangula.

Por outro lado, tinha sido lançado entre todos os alunos do 10° ano um concurso de sólidos geométricos, que seriam expostos durante a Semana da Matemática.

Quando recebemos a revista, faltavam apenas cinco dias para o início da Semana. Era uma oportunidade óptima de expor um sólido tão interessante, mas não havia tempo de executar a tarefa com os alunos envolvidos no projecto, ou durante as aulas de 50 minutos. Assim foi num fim de semana, com uma aluna do 8° ano, outro do 12° ano e outro do 10° (e amigos...) que metemos mão à obra.

Na segunda–feira o efeito foi espectacular.

Mais tarde, montámos um cartaz explicativo com as fases da construção do sólido.

Nunca foi experimentada em sala de aula, no entanto, penso que é adequada a uma turma do 10° ano. Poderá ser uma forma de motivar o estudo de Geometria. Há sempre alunos que não conseguem resolver problemas, apesar de compreenderem, vendo a sua resolução, todo o raciocínio que conduz à resposta. Tive oportunidade de verificar, com a construção de outro sólido vistoso, que esses alunos se revelam muito participativos, colocando na tarefa um empenho diferente do que é habitual.

Para despertar o interesse, basta mostrar um modelo do sólido, feito previamente, em tamanho pequeno.

A planificação de um "bico" pode ser executada num dos programas de geometria (Geometer's Sketchpad ou Cabri-géomètre), num tamanho adequado, e as cartolinas poderão ser impressas directamente (há cartolinas de formato A4, utilizáveis na maioria das impressoras).

Supondo que cada "bico" é impresso numa cartolina, com as 25 cartolinas (5 de cada cor), já impressas (para o caso de os alunos se enganarem a cortar, convém fazer um "bico" suplente de cada cor, o que totaliza 25 em vez de 20 "bicos"), e com uma boa colecção de tesouras e de tubos de cola, 90 minutos serão suficientes para fazer surgir o sólido.

Um bom complemento desta actividade, é construir a estrutura do dodecaedro com o tetraedro nele inscrito. Para isso basta utilizar palhinhas de refrescos, ligadas por um fio resistente, cujo interior deverá ser reforçado com palitos de espetadas...

Isabel Viana
Escola Secundária Infante D. Henrique, Porto