Equações no *Libro de Algebra* de Pedro Nunes

Maria do Céu Silva

Este ano, em que se completam 500 anos sobre a data do nascimento de Pedro Nunes, queremos lembrar aqui as seguintes palavras suas: "A sciência não trata só das coisas que são somente imaginárias ou impossíveis: mas das certas e verdadeiras: as quaes todas tem nome em qualquer lingoagem por mui barbara que seja." *in* Dedicatória do Tratado da Shpera.

Apontamentos biográficos de Pedro Nunes

Ainda nos finais do século XIX a biografia de Pedro Nunes era praticamente ignorada ([8], p.37) e o que sobre ela se escrevia estava cheio de inexactidões. Documentos autênticos poucos se conheciam e alguns deles não se referiam ao nosso matemático, mas a homónimos seus que viveram na mesma época e que com ele eram confundidos pelos estudiosos. Embora alguns aspectos da sua biografia sejam ainda hoje desconhecidos, sabe-se que nasceu em 1502 em Alcácer do Sal, pois ele mesmo o declara em *Opera quae complectuntur*, publicada em 1566 "*... anno Domini 1502 quo ego natus sum ...*". Em rigor não se sabe quem foram os seus pais ([3], p.9) e se teve ou não irmãos, mas supõe-se que era cristão novo.

Também dos seus primeiros estudos não existem indicações precisas, mas fê-los em Portugal. Depois, terá ido para Salamanca onde viveu, estudou como aluno livre, e casou, em 1523, com Guiomar de Árias. Joaquim de Carvalho ([2], p. 371) admite que Pedro Nunes deve ter ido ainda muito jovem para esta cidade. Como curiosidade, cita-se o apontamento que fez, referindo-se ao manuscrito dos *Libros del Saber* de astrologia, de Afonso o Sábio: "... Não é crível que [P.N.] tivesse examinado este manuscrito pelos anos em que frequentou a Universidade de Salamanca (1521?, 1525?) porque tais curiosidades e canseiras não são normalmente toleradas pela verdura dos anos e pelos impulsos e aspirações de quem felizmente vive mais como estudante do que como estudioso..." .

De qualquer modo, já por volta de 1525 devia ter regressado a Portugal, pois quando em 16 de Novembro de 1529 foi nomeado Cosmógrafo do Reino, já era bacharel em Medicina pela Universidade de Lisboa. Em Dezembro desse ano foi incumbido da regência da cadeira de Filosofia Moral da Universidade de Lisboa, em Janeiro de 1530 foi incumbido da cadeira de Lógica, e nos dois anos seguintes, da de Metafísica ([1], p.16). Em 1532 abandonou esta instituição de ensino, mas nessa altura já tinha aceite o convite que o rei D. João III lhe endereçara para ser mestre dos seus irmãos, os infantes D. Luiz e D. Henrique, tarefa que terá desempenhado durante cerca de dois anos ([2], p.297). Dos conteúdos das lições e do tempo que a elas dedicava não há informações precisas, mas os *Elementos* de Euclides, o *Tratado da Esfera* de Sacrobosco, as *Teóricas dos Planetas* de Purbáquio, o *Almajesto* de Ptolomeu, a *Mecânica* de Aristóteles e a Cosmografia estavam entre os assuntos estudados ([5], pp.297-303).

Em 16 de Outubro de 1544 foi nomeado lente da cadeira de Matemática na Universidade de Coimbra e em 22 de Dezembro de 1547 foi promovido a Cosmógrafo-Mor do reino.

Em 1572, foi encarregado pelo Rei D. Sebastião de proceder à reforma dos pesos e medidas. Faleceu a 11 de Agosto de 1578, em Coimbra, uma semana após a batalha de Alcácer-Quibir.

Pedro Nunes é sobretudo conhecido pelas obras que publicou. Entre elas citamos o *Tratado da Esfera* (publicado em 1537, em Lisboa, e dedicado ao infante D. Luiz), o *De Crepusculis* (publicado em 1542, em Lisboa, e dedicado ao rei D. João III) e o *Libro de Algebra en Arithmetica e Geometria*[1] (publicado em 1567, em Antuérpia, e dedicado ao cardeal D. Henrique).

Apesar de publicado em 1567, o *Libro de Algebra* começou a ser escrito cerca de 30 anos antes. Os textos então mais divulgados onde o assunto era tratado eram as obras dos italianos, Pacioli, Cardano, e Tartaglia. Em Portugal, o primeiro livro de matemática impresso foi o *Tratado da Pratica Darismetica*, por Gaspar Nicolas (1519). Era um manual prático com regras para as quatro operações aritméticas elementares, para a raiz quadrada e fracções, em que para os problemas apresentados as soluções eram indicadas sem qualquer explicação. O segundo livro de matemática só apareceu passados trinta e seis anos, foi o *Tratado da Arte d'Aritmetica*, publicado em 1555 por Bento Gonçalves.

Nos princípios do século XX, Bosmans ([1], p.222) afirmava: "A Álgebra de Nunez é hoje muito pouco conhecida, para não dizer completamente ignorada. Teve, contudo, o seu momento de glória, e teve-o justamente. Simon Stevin, Adrien Romain, Guillaume Gosselin, por exemplo, juízes competentes, falam dela em termos elogiosos. Donde vem, então, a falta de atenção dos historiadores de matemática? Há para isso uma razão; a extrema raridade da obra. E não há outra pois a obra de Nunes é, sob todos os pontos de vista, notável."

Abramos o Libro de Algebra

Desde logo ficamos a saber que Pedro Nunes escreveu esta Obra porque reconhecia que a álgebra, "abreviando as ideias e arranjando-as de uma forma natural", era de grande utilidade para a invenção de toda a espécie de teoremas e para a resolução de problemas e que o seu conhecimento se justificava numa cidade como Lisboa, em que o comércio era a actividade dominante. Diz Pedro Nunes: "O meio de que usamos para alcançar este fim é a igualdade. As principais quantidades a que por discursos demonstrativos procuramos esta igualdade, somando-lhe ou retirando-lhe quanto convém, como quem põe na balança, são três: Número, Coisa, Censo." (Lembramos que coisa e censo designam, como era tradição italiana na época, a incógnita e o seu quadrado, respectivamente).

O *Libro de Algebra* é constituído por três partes principais, duas das quais inteiramente dedicadas à resolução da equação do 2° grau, e termina com uma Carta aos leitores, onde o autor faz diversas considerações sobre a resolução da equação do 3° grau. É, também, nesta Carta que Pedro Nunes nos fala das preocupações de carácter didáctico que teve na elaboração da obra, dizendo a esse respeito ([6], p.393): "Eu neste meu livro levo sempre ordem, e os casos de Aritmética e Geometria que são mais fáceis, vão como "iguaria", que é a doutrina de Aristóteles, e tanto nos fáceis como nos difíceis trago os discursos necessários. Demonstro todas as Regras que uso e não refiro outro autor que não seja Euclides, e onde convém, nem trago mais do que o necessário".

Vejamos, então, como Pedro Nunes faz o estudo das equações de grau não superior a 2.

As equações do 2° grau no *Libro de Algebra*

Como atrás dissémos, estas equações são tratadas no *Libro de Algebra* em dois momentos diferentes. Na Parte Primeira (com apenas 23 folhas), o autor parece ter tido a intenção de fazer uma introdução elementar que preparasse os leitores que apenas pretendessem ficar com um conhecimento básico do assunto e motivasse os mais interessados, mostrando-lhes a importância da álgebra e cativando-lhes a atenção para uma abordagem mais detalhada. Ao retomar estas equações, na Terceira Parte Principal (constituída por 200 folhas), Pedro Nunes fez um estudo mais profundo, dando novas demonstrações e apresentando muitos e variados exemplos de aplicação não só à aritmética (como acontecia na Primeira Parte) mas também à geometria. As aplicações à aritmética têm, ao contrário do que era costume na época, o carácter de exercícios abstractos sobre números ([7], pp.4-5) desligando-se o autor da geometria, à qual recorre apenas para fazer a prova dos resultados que estabelece.

Os seis capítulos que constituem a Parte Primeira têm por objecto o estudo das *conjugações* (que são as seis versões da actual forma canónica das equações de grau não superior a dois, envolvendo apenas coeficientes positivos) com o consequente estabelecimento e demonstração das respectivas regras de resolução.

Nesse estudo são considerados dois tipos de conjugações, descritos na Tabela 1.

E é usada a seguinte metodologia:

Cada conjugação é tratada por sua vez, sendo, em cada caso, indicada uma regra geral, formulada em linguagem comum, para a sua resolução; em seguida é dado um exemplo de aplicação da regra e feita a verificação do resultado; depois, a regra é praticada com um problema cuja matematização conduz à conjugação em causa; por fim é feita uma primeira demonstração à qual se segue uma segunda, que no seu entender é "mais perfeita". Ambas as demonstrações são extensas, detalhadas e com suporte geométrico.

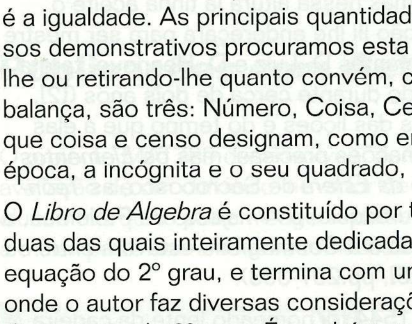

Figura 1. Reprodução de um selo emitido em 1978 (400 anos sobre a data da morte de Pedro Nunes). Nela podem ver-se, entre outros elementos, uma operação envolvendo duas expressões do 2° grau, em álgebra sincopada, utilizada por Pedro Nunes. As expressões parecem ser: *30.p.15.co.p.2.ce*, *3.m.12.co.p.7.ce* e uma parte do resultado (suposta soma), *.p.3.co.p.9.ce*. Em notação usual, essas expressões escrevem-se: $30 + 15x + 2x^2$, $3 - 12x + 7x^2$ e $+3x + 9x^2$.

Tabela 1.

Conjungações simples		Conjungações compostas	
Censos iguais a coisas	$ax^2 = bx$	Censo e coisas iguais a número	$x^2 + bx = c$
Censos iguais a número	$ax^2 = c$	Coisas e número iguais a censo	$bx + c = x^2$
Coisas iguais a número	$bx = c$	Censo e número iguais a coisas	$x^2 + c = bx$

(A segunda e a quarta colunas são as versões moderna da primeira e terceira.)

A título de exemplo, mostramos como esta metodologia é posta em prática para o caso da 4ª conjugação, a primeira das compostas.

1° — É enunciada a conjugação e indicada a respectiva regra:

"Quando um censo e as coisas forem iguais a número, multiplicaremos metade do número das coisas por si mesmo, criando quadrado, e a este quadrado juntaremos o número proposto, e de toda a soma tomaremos a raiz. Dessa raiz tiraremos a metade do número das coisas, e ficará manifesto o valor da coisa". ([6], p.2)

Seguindo as indicações de Pedro Nunes, e utilizando a notação usual, o texto anterior propõe que se proceda do seguinte modo: Dada a equação $x^2 + px = q$, calcular sucessivamente,

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2, \ \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q, \ \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}, \ \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$$

O valor da incógnita é

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$$

2° — A regra geral é aplicada ao seguinte exemplo:

"Suponhamos que um censo e dez coisas são iguais ao número 56 e queremos saber o valor da coisa".

O que temos a fazer é: calcular

$$5^2 = 25, \ 25 + 56 = 81, \ \sqrt{81} = 9, \ 9 - 5 = 4\,.$$

O valor da coisa é 4.

A este procedimento, segue-se a verificação, nos seguintes termos: "E assim é, porque, sendo 4 o valor da coisa, será o quadrado 16 que junto a 40 que é o valor de 10 coisas, fará 56 que se supôs serem iguais a 1 quadrado e 10 coisas."

3° — A regra é aplicada à resolução do problema:

"Partamos 60 por um número tal que o que vier na partição exceda o partidor em 4".

Este problema, que em termos actuais pode ser traduzido por $60/x = x + 4$, conduz à equação $x^2 + 4x = 60$, cuja solução, de acordo com a regra dada, é 6.

4º- Esboço da primeira demonstração da conjugação $x^2 + px = q$.(Ver Figura 2.)

Tomar ab igual a $p/2$ e prolongar ab até c, obtendo bc, um lado do quadrado desconhecido, x.

Construir o quadrado sobre ac e decompô-lo em dois quadrados $(hfye)$ e $(bcgf)$ (de lados iguais a ab e bc, respectivamente) e dois rectângulos iguais $(abfh)$ e $(fgdy)$.

Por ser ab igual a $p/2$ e bf igual a x, a área dos dois rectângulos $(abfh)$ e $(fgdy)$ é px. Como a soma desta área com a área do quadrado de lado bc é q (conhecido), então a área do quadrado de lado ac é igual à soma de q com a área do quadrado de lado ab, isto é, $ac^2 = q + ab^2$ (onde, como vimos, ab e q são conhecidos). Daqui se conclui que: $ac = \sqrt{q + ab^2}$ e, portanto, $bc = \sqrt{q + ab^2} - ab$ (ou seja,

$$x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}).$$

Esta demonstração, que não é inovadora, apoia-se em *Elementos* de Euclides (Prop. II, 4).

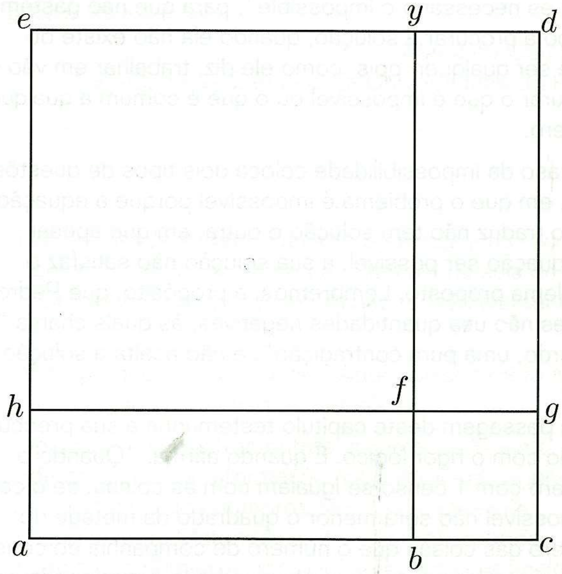

Figura 2.

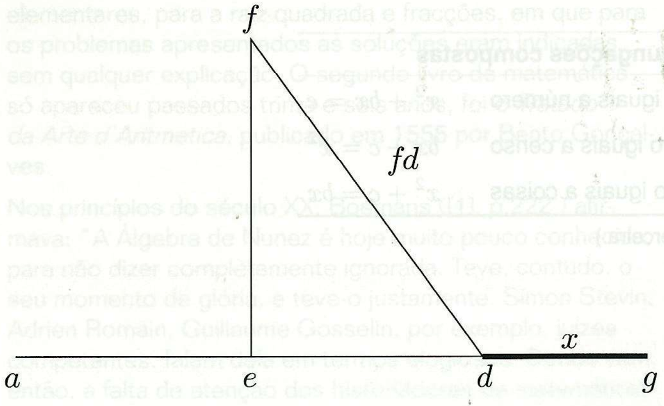

Figura 3.

5º — Esboço da segunda demonstração da conjugação $x^2 + px = q$. (Ver Figura 3.)

Tomar um segmento ad, de comprimento p, e designar o seu ponto médio por e. Marcar na perpendicular a ad, por e, um segmento de comprimento $\sqrt{q}$, obtendo o ponto f. Determinar o ponto g como intersecção da semi-recta ed com a circunferência de centro e e raio fd. Então, $x = dg$.

Como $fd^2 = ef^2 + ed^2$ e $fd = eg$, então $eg^2 = ef^2 + ed^2$; substituindo nesta expressão eg por $ed + dg$ e simplificando, vem: $dg^2 + p \cdot dg = q$.

Logo, dg é a solução.

Pedro Nunes inclui nesta Parte um capítulo no qual dá indicações para reconhecer se o caso que estamos a tratar é impossível ou indeterminado: "Como conosceremos si el caso es necessario o impossible", para que não gastemos tempo a procurar a solução, quando ela não existe ou pode ser qualquer; pois, como ele diz, trabalhar em vão é procurar o que é impossível ou o que é comum a qualquer número.

No caso da impossibilidade coloca dois tipos de questões: uma, em que o problema é impossível porque a equação que o traduz não tem solução e outra, em que apesar da equação ser possível, a sua solução não satisfaz o problema proposto. Lembremos, a propósito, que Pedro Nunes não usa quantidades negativas, às quais chama "um absurdo, uma pura contradição", e não aceita a solução nula.

Uma passagem deste capítulo testemunha a sua preocupação com o rigor lógico. É quando afirma: "Quando o número com 1 censo se igualam com as coisas, se o caso for possível não será menor o quadrado da metade do número das coisas que o número de companhia do censo e inferimos logo que, se o dito quadrado é menor não será o caso possível" (ou seja, usando terminologia actual, se a equação é possível o discriminante é não negativo, donde, se o discriminante é negativo a equação é impossível).

Como atrás referimos, só na Terceira Parte Principal do *Libro de Algebra* Pedro Nunes volta a tratar equações do segundo grau, explicando o que fazer para as reduzir a uma das conjugações. A este respeito diz: "E quanto à ordem que devemos ter no igualar, parece coisa mais razoável que, primeiramente se compensem os defeitos, se os houver, e depois se reduza o redundante, que for comum a ambas as quantidades, pois embora não haja inconveniente em trocar a ordem, é aquela mais fácil de entender". Assim, por exemplo, se tivermos $3x + 20 - x^2 = 10$, compensamos o defeito, que é x^2, somando x^2 a ambos os membros; obtemos $3x + 20 = 10 + x^2$. Em seguida, reduzimos o redundante, que é 10, subtraindo 10 a ambos os membros; obtemos $3x + 10 = x^2$.

As equações de grau superior a 2 no *Libro de Algebra*

É na Terceira Parte Principal e no Posfácio (em que Pedro Nunes se dirige aos leitores) que aparecem referências às equações de grau superior a dois.

Algumas destas equações são tratadas com generalidade, como por exemplo, as do tipo $ax^m = bx^n$, para as quais é indicado um processo igual ao que hoje utilizamos, e que em geral passa pela extracção da raiz. Mas, na maioria dos casos, o autor indica um procedimento que lhe permite reduzir as equações em causa a uma das conjugações. É o que acontece com as equações dos tipos: $ax^{n+2} + bx^{n+1} + cx^n = 0$, $x^{2n} + ax^n + b = 0$ e $ax^4 + bx^2 \pm cx^3 = d$, com $c = 2\sqrt{a}\sqrt{b}$.

Para as primeiras, divide por x^n; para as segundas, faz a substituição $x^n = y$; e para as últimas, em cujo primeiro membro reconhece o quadrado de um binómio, extrai a raiz quadrada.

Sobre este último caso Pedro Nunes dá dois exemplos curiosos.

Um é o da equação $4x^4 + 9x^2 + 12x^3 = 196$ que, por extracção da raiz quadrada a ambos os membros, transforma em $2x^2 + 3x = 14$; o outro é o da equação $9x^4 + 16x^2 - 24x^3 = 225$ que, à semelhança da anterior, transforma em $3x^2 - 4x = 15$, concluindo que $x = 3$. Porém, aqui, detém-se para observar que, se tomar para raiz de $9x^4 + 16x^2 - 24x^3$ o binómio $4x - 3x^2$, em vez do seu simétrico, é conduzido à equação $4x - 3x^2 = 15$, que não tem solução. Este facto deixa-o confuso, como pode depreender-se das suas palavras ([6], p.161): "E nesta parte notaremos uma coisa muito digna de se saber, e que é muito difícil, e muito estranha ao nosso entendimento, pelo pouco exercício que temos nas subtilezas da Aritmética". Contudo, logo de seguida o problema é ultrapassado e a resposta é dada nos seguintes termos ([6], p.161): "Assim como $9x^4 + 16x^2 - 24x^3$ tem duas raízes, assim também 225 tem duas raízes, uma é +15 e a outra é –15".

Não quisemos deixar de mencionar este caso paradigmático, que mostra como a sua experiência na manipulação algébrica o fez reflectir sobre importantes aspectos aritméticos.

Para resolver equações do terceiro grau Pedro Nunes recorre a várias estratégias, como somar um número conveniente a ambos os membros da igualdade ou dividir polinómios, com o fim de conseguir um abaixamento de grau; e aconselha o leitor que queira por em prática este processo, sem grande esforço, a compor e memorizar uma tábua de produtos de polinómios do tipo $(ax+1)(x+b)$ com $a{,}b{=}1{,}2{,}\ldots{,}10$.

A propósito das equações do tipo $x^3 = ax + c$, quando $a = c + 1$, o número que soma a ambos os membros é 1 (é o que convém), para em seguida, cada um deles ser divisível por $x + 1$; mas se, em vez disso, for $2a = c + 2^3$, o número passa a ser 8, e o polinómio divisor é $x + 2$.

Como exemplo de aplicação toma a equação $x^3 = 7x + 6$, que está nos dois casos referidos. De facto, somando 1 a ambos os membros obtém $x^3 + 1 = 7x + 7$, que se transforma na conjugação $x^2 = 6 + x$ depois de dividir ambos os membros por $x + 1$; ou, em alternativa, somando 8 a ambos os membros, obtém $x^3 + 8 = 7x + 14$, que depois de dividida por $x + 2$, dá $x^2 = 2x + 3$.

No *Libro de Algebra* são trabalhados, por processos análogos a este, muitos exemplos de equações do terceiro grau, mas o nosso matemático não conseguiu atingir o seu objectivo principal — obter a forma geral de resolução da cúbica.

Antes de publicar a sua obra, Pedro Nunes teve conhecimento da regra geral de resolução da equação do tipo $x^3 + px = q$ divulgada por Tartaglia a Cardano, em forma de verso. Decidiu, então, inclui-la na "Carta aos Leitores" ([6], p.404):

"Quando o cubo junto com as coisas
Se iguala a algum número:
Descobre outros dois que difiram do conhecido.
E faz como é usual,
Que o seu produto seja sempre igual
Ao cubo da terça parte das coisas;
Então a diferença
Dos seus lados cúbicos, bem subtraída,
Valerá a tua coisa principal ... "[2],

acrescentando alguns detalhes sobre a sua invenção e divulgação.

Da leitura do Posfácio podemos concluir que Pedro Nunes procurou sempre actualizar os seus conhecimentos, inteirando-se da principal produção matemática da sua época. Por isso ele refere obras de Pacioli, Tartaglia e Cardano, que por vezes critica e explica, procurando tornar mais acessíveis e rigorosas algumas das provas nelas apresentadas.

Notas

1 A escolha da língua castelhana para a escrita desta obra teve como objectivo tornar o livro acessível a um maior número de leitores. ([6], p.XIV,XV.)

2 A regra implícita nestes versos dá a solução

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}$$

para a equação cúbica $x^2 + px = q$.

Referências bibliográficas

[1] Bosmans, H. (1908)."L'Algèbre de Pedro Nuñez" in *An. Sc. Academia Politécnica do Porto*, vol 3, pp 221-271. Porto.

[2] Carvalho, Joaquim (1943). *Anotações ao "De Crepusculis"*.

[3] Costa, Fontoura(1969). *Pedro Nunes (1502-1578).* Agência geral do Ultramar. Lisboa.

[4] Nunes, Pedro (1940). *Obras: De Erratis Orontii Finaei Regii Mathematicarum Lutetiae Professoris.* Imprensa Nacional de Lisboa.

[5] Nunes, Pedro (1943). *Obras: De Crepusculis.* Imprensa Nacional de Lisboa.

[6] Nunes, Pedro (1950). *Obras: Libro de Algebra en Ariyhmetica y Geometria.* Imprensa Nacional de Lisboa.

[7] Silva, Maria do Céu e Ribeiro, Rosa Maria (1999). "Aspectos do Libro de Algebra de Pedro Nunes", in *Informat*, Ano I, vol.4, Ministério da Educação.

[8] Vasconcellos, Fernando (1925). *História das Matemáticas na Antiguidade*, Paris-Lisboa.

Maria do Céu Silva
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

A revista *Educação e Matemática*

A revista Educação e Matemática editou o seu primeiro número em 1987 e, desde aí, tem marcado presença junto dos professores, constituindo uma fonte preciosa de recursos. Os textos seleccionados, os relatos e materiais de sala de aula, os artigos de opinião e os pontos de vista, as entrevistas, os problemas e os jogos, as informações, são elementos importantes de apoio à actividade e reflexão dos professores.

Faltam-lhe alguns exemplares? Logo um dos números em que saiu um artigo que gostaria de ler? Agora pode fazê-lo nas mesmas condições das outras publicações, ou seja, por metade do preço de capa, no caso de ser sócio.

Alguns dos números estão esgotados, podendo as revistas ser policopiadas, mas existem outras, algumas das quais reeditadas, que poderão ser adquiridas. Na página on-line da APM poderão consultar informação mais detalhada sobre os números existentes em *stock*, salientando a redacção da revista a importância dos números temáticos, pela sua especificidade. Assim, existem exemplares dos números 27 – História e Ensino da Matemática, 31 – O Professor de Matemática, 35 – Viver e pensar a aula de Matemática, 40 – A Matemática nos primeiros anos, 45 – Tecnologias (inclui um índice de artigos sobre tecnologias na Educação Matemática e Actas do ProfMat), 50 – Educação, Escola, Matemática, 55 – O currículo e 60 – A Matemática. O último número temático – 64 – foi dedicado à Matemática e Natureza. O número 65, apesar de não ser temático, inclui um dossier do 1° ciclo.

A redacção