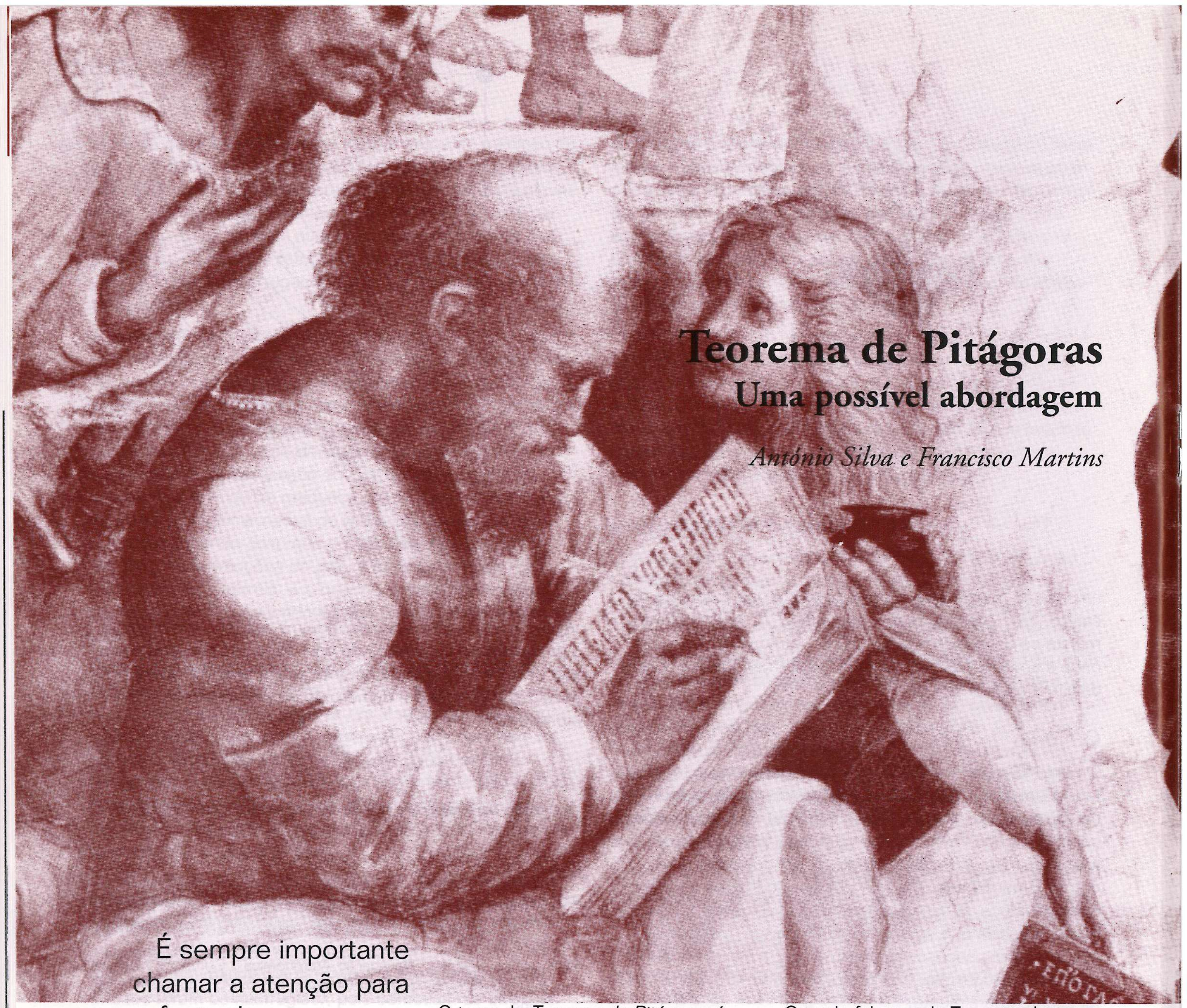

Teorema de Pitágoras
Uma possível abordagem

António Silva e Francisco Martins

É sempre importante chamar a atenção para o facto de que, apesar de um problema estar resolvido, isso não signifi-car que se tenha fechado uma porta. Pode ser sempre aliciante procurar novas portas de entrada para o conhecimento de uma situação se, para tanto, entendermos esse facto como um desafio, um prazer ou uma activi-dade onde a imaginação e a criatividade são as suas chaves mestras.

O tema do *Teorema de Pitágoras* é abordado no 8º ano do 3º ciclo do Ensino Básico. É curioso observar que, em todos os manuais existentes actualmente no mercado editorial, encontramos sempre o mesmo tipo de abordagem de demonstração deste Teorema: *a decomposição de um quadrado em quadrados e triângulos*. Esta abordagem faz todo o sentido na continuidade da exploração da decomposição de figuras. Mas... surge então naturalmente a pergunta: porque não complementar este estudo com outras abordagens demonstrativas do Teorema que façam uso dos conhecimentos adquiridos pelos alunos em anteriores anos de escolaridade, nomeadamente sobre semelhanças de triângulos (7º ano) e sobre áreas de triângulos e quadrados (6º e 7º anos)?

Quando falamos do Teorema de Pitágoras falamos igualmente de dois conceitos fundamentais que lhe estão intimamente associados: o conceito de área e o conceito de semelhança de triângulos. De modo evidente ou dissimulado, estes dois conceitos estão sempre presentes em qualquer tipo de raciocínio que se possa elaborar para demonstrar este teorema. No entanto, nos manuais que consultámos, este facto parece ter sido totalmente esquecido.

Observando um pouco mais detalhadamente esta questão, podemos verificar que o Teorema de Pitágoras é abordado imediatamente a seguir ao estudo da decomposição de figuras, mas completamente desligado do estudo mais aprofundado das semelhanças de triângulos, que tem lugar numa fase posterior. Daí que seja pertinente questionar: porque não alterar a ordem de abordagem destes conceitos? Isto é, porque não começar por abordar a Decomposição de Figuras, seguida do estudo das Semelhanças de Triângulos (analisando aqui a decomposição de um triângulo rectângulo em triângulos semelhantes) e finalmente, como síntese lógica da análise dos dois temas anteriores, a temática do Teorema de Pitágoras? A relação existente entre as noções de razão de semelhança entre dois polígonos e a razão das suas áreas é essencial para a compreensão integral das questões que estão envolvidas na demonstração do Teorema de Pitágoras.

Vejamos então como poderia ser abordado este tema, neste novo contexto, após uma primeira abordagem da demonstração do Teorema de Pitágoras usando a decomposição de figuras.

Tomemos um triângulo, rectângulo em A, como o da figura 1.

Vamos começar por traçar uma perpendicular à hipotenusa a partir do vértice do ângulo recto. Ficamos assim com o nosso triângulo rectângulo dividido em dois triângulos rectângulos *mais pequenos*.

Comecemos por observar que: $AC \perp AB$ e $AD \perp BC$.

É fácil verificar que qualquer um dos triângulos rectângulos mais pequenos é semelhante ao triângulo rectângulo grande. (Porquê?... pode ser a pergunta, já que este tipo de análise do problema é do conhecimento dos alunos desde o ano lectivo anterior).

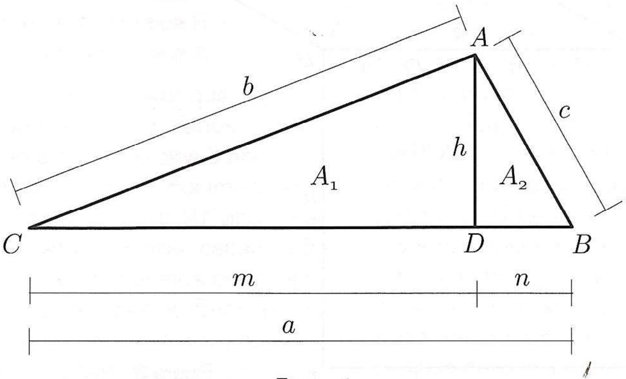

Figura 1

Vamos então provar este facto:

$\triangle ABC \sim \triangle ADB$, porque têm dois ângulos iguais:

- O ângulo B é comum aos dois triângulos;
- Os ângulos BAC e ADB são rectos.
- Neste caso a razão de semelhança vai ser: $R = c/a$

$\triangle ABC \sim \triangle ADC$, porque têm dois ângulos iguais:

- O ângulo C é comum aos dois triângulos;
- Os ângulos BAC e ADC são rectos.
- Neste caso a razão de semelhança vai ser: $R = b/a$

Consideremos agora que A, A_1 e A_2 são, respectivamente, as áreas de $\triangle ABC$, $\triangle ADB$ e $\triangle ADC$. Podemos então afirmar que: $A = A_1 + A_2$

Mas, vimos já anteriormente que existe uma proporcionalidade directa entre as áreas de duas figuras semelhantes. No nosso caso isto significa que podemos obter a área do *triângulo menor* multiplicando pelo quadrado da razão de semelhança a área do *triângulo grande*. Isto é: $A_1 = (c/a)^2 \times A$ e $A_2 = (b/a)^2 \times A$

Logo:

$A = (c/a)^2 \times A + (b/a)^2 \times A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A = A \times (c^2/a^2 + b^2/a^2) \Leftrightarrow$ (*)

$\Leftrightarrow 1 = c^2/a^2 + b^2/a^2 \Leftrightarrow$ (*)

$\Leftrightarrow a^2 = c^2 + b^2$

Esta abordagem da demonstração do Teorema de Pitágoras tem algumas fragilidades. Como explicar aos alunos a manipulação algébrica nela envolvida? Se bem que as passagens (*) possam ser naturalmente aceites, elas pressupõem o conhecimento do facto de que, quando multiplicamos ou dividimos ambos os seus membros de uma equação por um mesmo número, diferente de zero, obtemos uma equação equivalente à inicial. Esta propriedade pode ser aqui recordada, mas está obviamente fora de contexto.

A relação entre a razão de semelhança de dois triângulos rectângulos e a razão das suas áreas é aqui perfeitamente realçada, com uma simplicidade e clareza extraordinárias.

Claro está que existem modos mais simples de abordar este tema, mas onde a relação entre a razão de semelhança de dois triângulos rectângulos e as suas áreas se esbate de modo significativo. Vejamos o exemplo seguinte, consideremos novamente um triângulo rectângulo como o da figura 1.

Tracemos novamente uma perpendicular à hipotenusa a partir do vértice do ângulo recto. Ficamos assim com o nosso triângulo rectângulo novamente dividido em dois triângulos rectângulos mais pequenos. Vamos separar os nossos três triângulos para podermos visualizar melhor o que eles têm em comum (Figura 2).

Novamente, qualquer um dos *triângulos rectângulos mais pequenos* é semelhante ao *triângulo rectângulo grande*, facto este que já foi provado anteriormente.

Então, sendo semelhantes, os triângulos têm os lados correspondentes proporcionais. Podemos assim escrever as igualdades seguintes: $a/b = b/m$; Logo $a \times m = b \times b$ ou seja $a \times m = b^2$. (i)

(i) Podemos chamar aqui a atenção para o facto de $a \times m = b^2$ mais não ser do que uma igualdade de áreas, a área de um rectângulo e a área de um quadrado, como podemos facilmente observar na Figura 3.

Temos

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n};$$

Logo $a \times n = c \times c$ ou seja $a \times n = c^2$ (ii)

(ii) Podemos chamar aqui novamente

a atenção para o facto de $a \times n = c^2$ mais não ser do que uma igualdade de áreas, a área de um rectângulo e a área de um quadrado, como podemos novamente observar na Figura 3.

Vejamos agora o que obtemos quando adicionamos b^2 e c^2:

$$b^2 + c^2 = (a \times m) + (a \times n)$$

$$b^2 + c^2 = a \times (m + n)$$

Mas, $m + n = a$. Logo:

$$b^2 + c^2 = a \times a = a^2$$

Vamos finalmente obter:

$$b^2 + c^2 = a^2 \text{ (iii)}$$

(iii) A ideia de adicionar b^2 e c^2 permite resolver a questão mas não deixa de ser um *coelho tirado da cartola*. Como justificar, neste passo, a opção de adicionar b^2 e c^2 sem ter já presente o conhecimento prévio do resultado a que queremos chegar? Constata-se que ela conduz ao resultado pretendido, mas de um modo não natural, isto é, não estamos perante um procedimento que se afigure como continuação lógica da análise da situação.

Claro está que, dado o nível etário e os pré-requisitos dos alunos a que nos estamos a dirigir, esta demonstração será provavelmente mais facilmente aceite por estes. No entanto, toda a riqueza matemática dos assuntos abordados perde-se irremediavelmente, quando a comparamos com a demonstração anterior. Não deixa, todavia, de ser uma boa demonstração, ao fazer apelo às Semelhanças de Triângulos.

Sugestão de actividade

Na abordagem das *Semelhanças de Triângulos* é referido o facto de que: "Todos os triângulos rectângulos se podem decompor em dois triângulos semelhantes". Porque não ir um pouco mais longe e propor a seguinte actividade exploratória: "Quais são os triângulos que se podem decompor em dois triângulos semelhantes?". Com esta investigação, os alunos poderiam concluir não só o resultado anterior, mas igualmente o facto de que *essa propriedade é exclusiva dos triângulos rectângulos*.

Estes exemplos de demonstração do

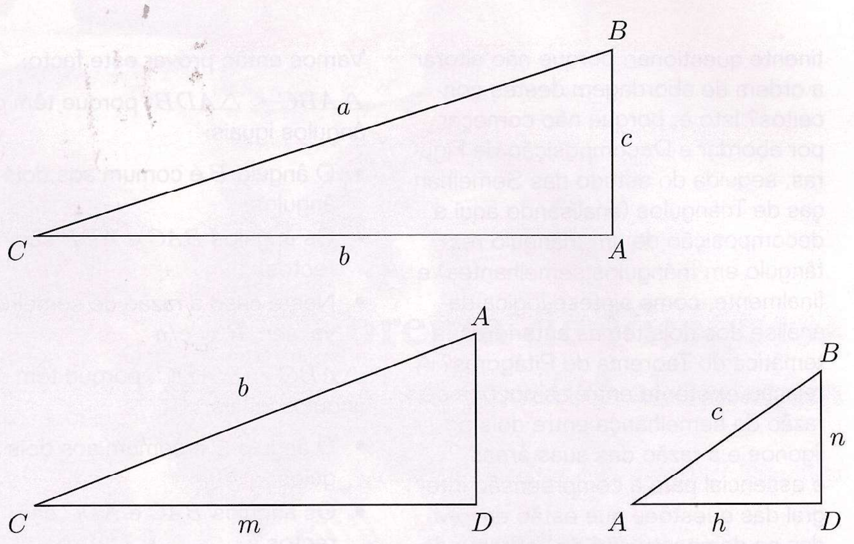

Figura 2

Teorema de Pitágoras podem igualmente ser introduzidos com um pouco de História da Matemática, chamando a atenção para o facto de existirem para cima de 300 demonstrações deste Teorema. É sempre importante chamar a atenção para o facto de que, apesar de um problema estar resolvido, isso não significar que se tenha fechado uma porta. Pode ser sempre aliciante procurar novas portas de entrada para o conhecimento de uma situação se, para tanto, entendermos esse facto como um desafio, um prazer ou uma actividade onde a imaginação e a criatividade são as suas chaves mestras.

Simplicidade, clareza, perceptividade e riqueza matemática devem ser os lemas de toda e qualquer abordagem temática em Ensino da Matemática.

Como afirma Ian Stewart, no prefácio da sua obra *Deus joga aos dados*: "É esta a razão pela qual é possível divulgar a Matemática. Há milhões de histórias para contar, muitas delas fascinantes. E, como a Matemática a sério faz apelo a algumas características muito profundas da natureza humana — o amor pelos padrões, a procura da ordem, a tendência para unificar e classificar, o sentido visual da beleza, a sensação de ritmo —, isso não é assim tão difícil. *Apenas temos de contar essas histórias*".

António Manuel Silva
Francisco Romão Martins
Escola Secundária
Fernão Mendes Pinto

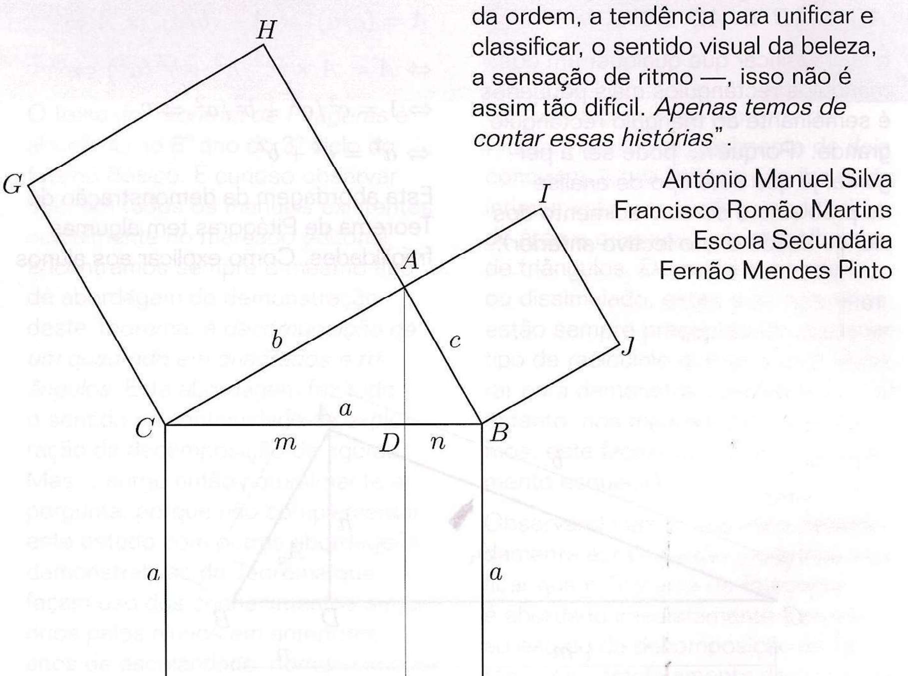

Figura 3