Geometria: o sinal STOP e o *Cabri*

Vidal Minga

O outro condutor não respeitou o sinal de prioridade e foi embater com a sua viatura no meu automóvel.

Na Declaração Amigável, tive que assinalar um sinal de STOP num dos ângulos do cruzamento. Notei alguma dificuldade em fazer a figura com os oito lados. O esquema final não era muito perfeito. Pensei então que partindo do quadrado seria fácil construir um octógono mais ou menos perfeito. Bastava cortar os quatro cantos do quadrado e saía um octógono, um octógono irregular, obviamente (ver figura 1).

Contudo, seria possível construir um octógono regular, a partir de um quadrado, desde que se encontrasse uma relação entre as três partes em que ficaram divididos os lados do quadrado, de tal modo que as hipotenusas dos triângulos obtidos no processo, fossem geometricamente iguais aos lados do octógono que se sobrepõem aos lados do quadrado (ver figura 2).

Considerando os elementos assinalados na figura 2, a relação analítica encontrada entre x, y e l (medida do lado do quadrado) foi a seguinte:

$$x = l(\sqrt{2}-1)$$

$$x = (l\sqrt{2}/2)(\sqrt{2}-1)$$

Dada a sua natureza, o processo de construir o octógono regular com estes números, não era simples.

Devia haver um processo geométrico de construir o octógono regular, a partir do quadrado, de uma forma rigorosa, mais expedita e mais elegante. Fiz uma conjectura. E experimentei (ver figura 3).

Uma simples rotação do quadrado, à volta do centro e segundo um ângulo de 45° trouxe a confirmação da conjectura. O resultado era um octógono regular. As medições feitas com o *Cabri* até às milésimas não deixam qualquer dúvida sobre a regularidade do polígono obtido por este processo.

Observando de novo a figura, outros processos geométricos igualmente simples se apresentaram à minha consideração, para chegar ao mesmo resultado, ao mesmo octógono regular dentro dos condicionalismos impostos à sua construção, nomeadamente o quadrado-base (ver figura 4).

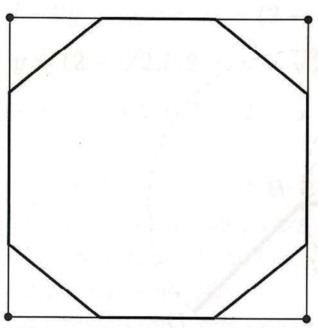


Figura 1

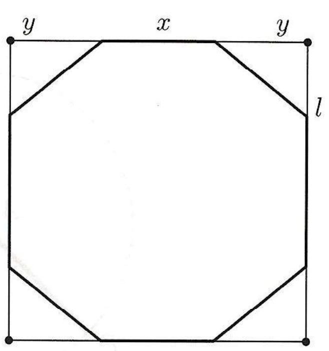


Figura 2

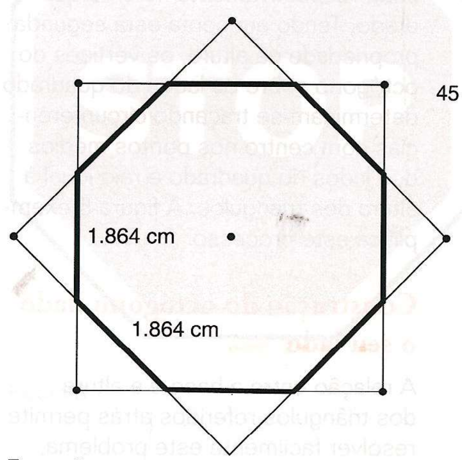


Figura 3

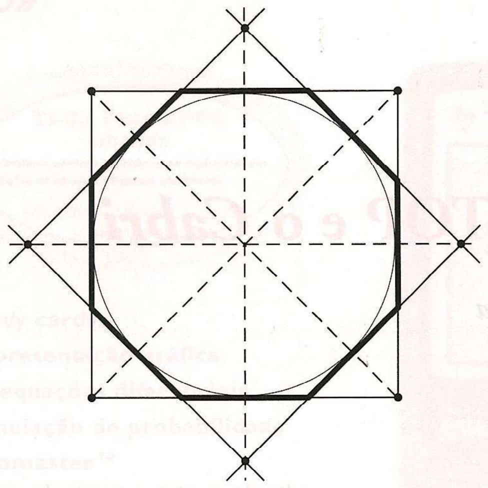


Figura 4

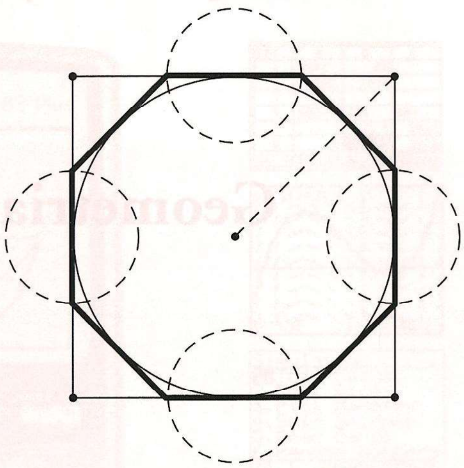


Figura 5

Uma relação importante

Uma observação mais atenta às linhas auxiliares desta figura mostrou que uma das alturas dos triângulos com base nos lados do octógono era exactamente igual a metade do comprimento da base, ou seja do lado do octógono.

Esta relação permite construir o octógono, dando apenas o seu lado. Ao mesmo tempo sugere de imediato outras ideias igualmente simples e interessantes para a construção do octógono regular sobre o quadrado. Registo uma delas: a altura dos triângulos é exactamente a distância entre as circunferências inscrita e circunscrita, respectivamente no e ao quadrado. Tendo em conta esta segunda propriedade da altura, os vértices do octógono sobre os lados do quadrado determinam-se traçando circunferências com centro nos pontos médios dos lados do quadrado e raio igual à altura dos triângulos. A figura 5 exemplifica este processo.

Construção do octógono dado o seu lado

A relação entre a base e a altura dos triângulos referidos atrás permite resolver facilmente este problema, considerando que os lados adjacentes a $[AB]$ têm a direcção dos catetos do triângulo.

Seja $[AB]$ o lado do octógono (ver figura 6).

Passos a seguir:

1. ponto médio M do segmento de recta $[AB]$;
2. circunferência com centro em M e passando por A;
3. perpendicular a $[AB]$ pelo seu ponto médio;
4. ponto C na intersecção com a circunferência;
5. circunferência com centro em B passando por A;
6. o ponto D, intersecção da recta BC com a circunferência define o 2° lado do octógono.

O lado $[AE]$ constrói-se pelo mesmo processo. Depois há inúmeras formas de concluir o octógono.

O processo utilizado na figura 7 é uma dessas formas: visto que já temos 4 vértices do octógono e que é possível encontrar o centro do polígono a partir de dois lados, podemos usar a simetria para obter os outros 4 vértices.

Este trabalho de investigação sobre a construção do octógono regular faz parte de um trabalho mais longo, cuja origem assenta na necessidade de desenhar um sinal de STOP e cuja motivação foi sendo conduzida e alimentada pelas inúmeras ideias que iam surgindo no caminho aberto pelo trabalho de experimentação que o *Cabri* com as suas potencialidades

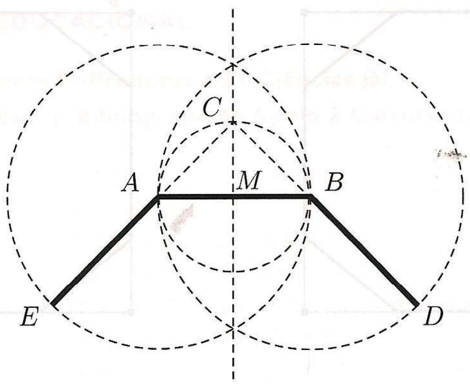


Figura 6

proporcionava, caminho que da conjectura e da experimentação, passando pela verificação e investigação, nos levou à descoberta.

Terminamos com a reprodução do sinal de STOP no *Cabri* (ver figura 8).

Não sendo o *Cabri* propriamente um *AutoCad*, um *CorelDraw* ou um *Frontpage*, programas mais dados a grafismos elaborados, o sinal, contudo, saiu perfeito (ver figura 8). Pelo menos aparentemente. Guiámo-nos pela nossa capacidade de observação visual para o desenhar. No entanto podemos levar o nosso rigor mais longe, pondo-nos em campo, estudando e medindo as suas dimensões e tentando reproduzi-lo em escala apropriada, dado que não possuímos um écran gigante para o reproduzir no seu tamanho real.

Se entretanto, do octógono-STOP, passarmos para o estudo e desenho de outros sinais de trânsito teremos um projecto muito interessante e mais vasto que nos permitirá estudar uma grande parte da geometria plana que aparece nos currículos escolares do 2º e do 3º ciclos. E tudo isto muito ligado a uma realidade do nosso meio e da nossa vida, o trânsito!

Anexos:

Cálculo dos valores de x e y no quadrado base

$l = x + 2y \Leftrightarrow x = l - 2y$

$x = \sqrt{2y^2} \Leftrightarrow x = y\sqrt{2}$

$l - 2y = y\sqrt{2} \Leftrightarrow y = (2 - \sqrt{2})l/2$

$y = (2 - \sqrt{2})l/2 \Leftrightarrow y = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)l/2$

$x = (2 - \sqrt{2})l/2 \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow x = l(\sqrt{2} - 1)$

Passos para construção da figura 7

01. $[AB]$ é o lado dado para o octógono
02. Ponto médio M do lado $[AB]$
03. Mediatriz de $[AB]$
04. Circunferência de raio $[MA]$
05. Intersecção C da mediatriz com a circunferência
06. Desenho da recta BC
07. Circunferência de raio $[AB]$, com centro em B.
08. Intersecção desta circunferência com a recta BC, ponto D.
09. Ponto médio de $[BD]$, ponto M1
10. Mediatriz de $[BD]$
11. Intersecção das duas mediatrizes, ponto I, centro do octógono.

Quatro simetrias centrais, centro I, e uma simetria axial, eixo IM, definem os restantes 4 vértices do octógono.

Vidal Minga
E.B. 2,3 de Paço de Arcos

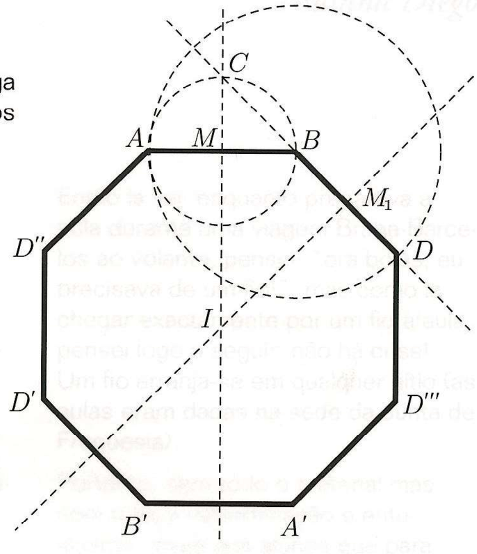


Figura 7

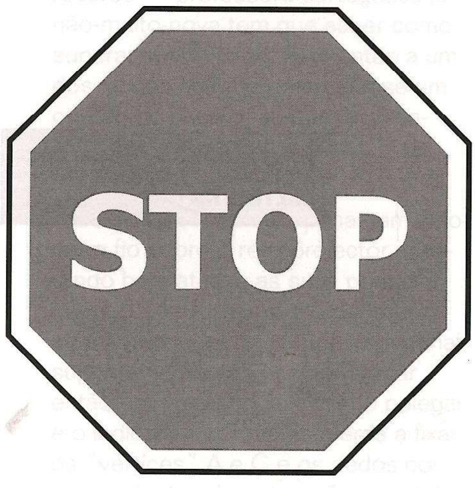


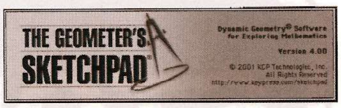
Figura 8

Disponível em breve

Versão 4 do *Geometer's Sketchpad*

Chega brevemente à Europa a tão esperada versão 4 do *Geometer's Sketchpad*. Para aproveitar o investimento que tantos de nós já fizemos neste programa, o interface do programa é muito semelhante ao da versão 3. No entanto, depois de uma rápida exploração, podem imediatamente notar-se algumas importantes diferenças:

- Animações. As animações têm mais potencialidades ao mesmo tempo que o modo de as iniciar se simplifica. Durante uma animação continuam acessíveis os objectos do *sketch*. A velocidade da animação é regulável, não estando sujeita como dantes à velocidade do computador. É possível, mediante comandos de *merge*, animar pontos em objectos a que não pertencem.
- Documentos. Conjuntos de diversos sketchs referentes ao mesmo tema constituem agora um documento. Não só todos os *sketchs* de um mesmo documento são acessíveis a partir de cada um deles, como pode construir-se um conjunto de *script tools* utilizáveis em todos os *sketchs* de um mesmo documento.
- Funções. O tratamento de funções e dos gráficos de funções é muito melhorado. Podem ser usados dois sistemas de coordenadas no mesmo *sketch*, e os sistemas de coordenadas podem não ser monométricos. A derivação de funções é acrescentada.
- Texto. As capacidades relativas ao texto são muito ampliadas (texto com estilos, notação matemática, símbolos para a geometria, etc. etc.)
- Cores. Pode usar-se uma extensa palete de cores, o fundo de um *sketch* pode colorir-se e as cores podem ser atribuídas em resultado de cálculos (parametrização de cores).
- *Traces*. Pode fazer-se o *trace* de qualquer objecto que se mova, e os *traces* não desaparecem, excepto a pedido (lenta ou imediatamente).
- Características dos objectos. É possível, numa janela de diálogo, alterar de modo muito amplo as propriedades dos objectos.
- Publicação on-line. É possível a publicação (*save as*) de um *sketch* numa página *web* (isto é, o *javaSketchpad* está integrado na versão 4), ou como documento para o computador de bolso Cassiopeia.
- Botões e *links*. Os botões de apresentação (*movement*, *hide/show*, etc) podem ser facilmente combinados (funcionamento simultâneo ou sequencial). Podem acrescentar-se botões/*links* para outros *sketchs* do mesmo documento ou para um *site* da Internet.



Contamos no próximo número da revista apresentar nesta secção uma comparação entre três programas de geometria dinâmica: *Cabri*, *Cinderella* e *Sketchpad*.

Eduardo Veloso
eduardoveloso@netcabo.pt