A presença da Natureza na Matemática:
algumas notas resultantes de uma consulta ao passado

Maria José Costa

Kepler acreditava que a proporção geométrica teria inspirado ao Criador a geração contínua de objectos similares a partir de objectos similares; mas quem terá inspirado o Homem para criar ou nomear as figuras geométricas?

Desde longa data — ou desde sempre? — que o homem é sensível à natureza. Bastará percorrer os achados arqueológicos encontrados em Portugal, e não só, para aceitar esta asserção; e se neles poderão existir registos mais latos, abundam representações de plantas e de animais, por certo, as imagens que mais chamaram a atenção dos seus autores (por exemplo, nas gravuras descobertas há alguns anos no Vale do Côa e mais recentemente no Sabor, estas datadas de 20 mil anos, há cavalos e auroques). Posteriormente, terá surgido a interpretação matemática da natureza, da qual a mais falada será, talvez, a que incidiu sobre o universo: numa pesquisa permanente através dos tempos, levada a cabo por nomes de vulto como Aristarco, Ptolomeu, Copérnico e Galileu, foi evoluindo a dúvida desde *como se move o Sol?* até *como se movem os planetas?* E Kepler não traduziu matematicamente as leis do movimento planetário? E Newton não definiu matematicamente a atracção universal entre dois corpos? E Eratóstenes não determinou o comprimento do raio da Terra? Não foi, porém, o universo o único segmento da natureza a despertar a atenção dos matemáticos. Chegaram até aos nossos dias estudos matemáticos que, apesar de não terem qualquer relação com folhas, trevos, rosas, gotas de água, corações, rins, borboletas, caracóis, serpentes, feijões, amendoins, pérolas, pêras, enfim! definem figuras que têm essas formas e, consequentemente, foram-lhes associados esses nomes.

Além das leis que regem os movimentos planetários, também se conhecem aplicações da matemática à Biologia, leis que quantificam o efeito de substâncias químicas no organismo humano, que justificam as variações da dimensão de uma população num micro-sistema, que quantificam o desenvolvimento de um ser orgânico…

Um estudo matemático de curvas não poderá prescindir da classificação das mesmas, do modo como lhes é atribuído o nome, da relação de umas com as outras, da listagem de algumas das suas propriedades; contudo, nenhum destes aspectos é primordial neste texto, no qual apenas se pretende evidenciar as ligações já estabelecidas entre a Matemática e Natureza.

Respiguemos algumas delas, não sem antes alertar para o facto de existirem curvas com o mesmo nome de proveniências diferentes, assim como casos particulares de algumas famílias que pertencem a outras famílias. Nestes casos, independentemente da equivalência da definição aplicada, há que verificar se as curvas obtidas apresentam as mesmas propriedades ou se, relativamente a um mesmo referencial, as definições analíticas coincidem.

Kepler acreditava que a proporção geométrica teria inspirado ao Criador a geração contínua de objectos similares a partir de objectos similares; mas quem terá inspirado o Homem para criar ou nomear as figuras geométricas?

Folium e quadrifolium

A palavra *folium* significa em *forma de pétala* e a palavra *quadrfolium* é, por vezes, substituída por *trevo* (de quatro folhas, subentende-se!).

À partida, seria de esperar que, a existirem curvas com estes nomes, elas estivessem algebricamente relacionadas. Contudo, apresentam entre elas diferenças significativas: enquanto que a primeira, em coordenadas cartesianas, é definida por uma equação do quarto grau, a segunda é traduzida por uma do sexto grau; em coordenadas polares, coordenadas que nestes assuntos simplificam um pouco mais a escrita matemática, são definidas, respectivamente, por

$$r = -4a\cos^3(\theta) \text{ e } r = a\text{sen}(2\theta).$$

Também seria de esperar que o homem tivesse atribuído os nomes de *bifolium* e *trifolium*. E assim aconteceu: trata-se de linhas cuja definição analítica é do tipo da primeira, fazendo com ela uma família assim definida:

$$r = -b\cos(\theta) + 4a\cos(\theta)\text{sen}^2(\theta).$$

Fazendo $b = 4a$ ou $b = 0$ ou $b = a$, teremos os três citados membros da família, respectivamente. Estas curvas têm, também, definições geométricas. Vejamos a do *bifolium*, por exemplo. Seja P um ponto da circunferência (*c*) de diâmetro $[OA]$, sendo O a origem do referencial e A um ponto do eixo das abcissas; seja p a recta paralela ao eixo das ordenadas tirada pelo ponto P e M e M' os pontos de intersecção dessa recta com a circunferência de centro P e raio $[OP]$. A linha descrita pelos pontos M e M' quando P descreve a circunferência (*c*), é o bifolium. Se de entre todas as curvas que usam a palavra *folium* no seu nome uma mereceu mais relevo do que as outras, o *folium* de Descartes, um dos *quadrifolium*, foi também eternizado mas por Grandi.

O folium de Descartes

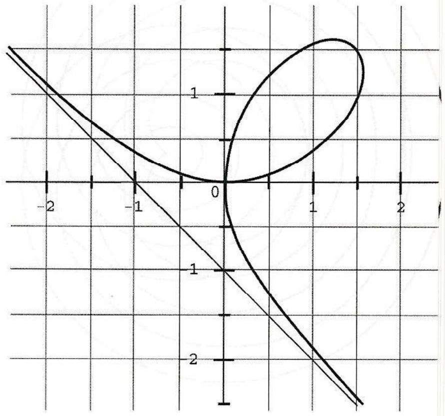
Descartes (1596—1650) não interpretou correctamente o texto sobre a determinação da tangente a uma curva que Fermat (1601—1665), talvez o maior matemático amador de todos os tempos, apresentou por carta ao monge Francês Mersenne (1588—1648). No sentido de comunicar a sua própria reflexão, provocada pela carta, criou uma curva a que mais tarde o matemático Francês Roberval (1602—1675), um dos poucos matemáticos não amadores que pertencia ao círculo de Mersenne, denominou *folium de Descartes*. Vejamos o que a história conta. Fermat determinava extremos de uma curva do tipo $y = f(x)$ por um método, reconhecido hoje como muito engenhoso, que consistia em identificar dois originais, muito próximos um do outro, com a mesma imagem. Para isso, começava com o cálculo daquilo a que hoje chamamos a razão incremental de uma função num ponto:

- considerava a imagem da função em dois pontos próximos, um de abcissa x e outro de abcissa $x + E$;
- calculava a diferença entre essas imagens;
- dividia essa diferença por E;
- igualava E a zero.

Este mesmo processo aplicado a um ponto qualquer, de abcissa a, no qual se pretende definir analiticamente a tangente, incide, agora, na determinação do declive da tangente nesse ponto. Em ambos os casos, seja na determinação de um extremo, seja na determinação da tangente, e em linguagem actual, Fermat propunha a determinação do limite da razão incremental da função num intervalo quando a amplitude deste intervalo tendia para zero: propunha, portanto, a passagem ao limite da dita razão incremental no intervalo de amplitude E, num caso definido a partir de x, e, no outro a partir de uma constante a.

Recebida a carta de Fermat, Mersenne terá feito o mesmo que em outras situações, nessa sua actividade que hoje é conhecida como a *república das cartas*: tê-la-á copiado o número de vezes necessário para a fazer chegar à comunidade matemática; e assim, a descrição do processo criado por Fermat para determinar tangentes a curvas terá chegado ao conhecimento de Descartes. Por dificuldade de explicação por parte de Fermat ou por dificuldade voluntária ou involuntária de compreensão por parte de Descartes, o certo é que houve dificuldade de comunicação entre estes dois matemáticos. A resposta não se fez esperar: Descartes desafiou Fermat a aplicar o seu método, que classificou de não geral, a uma curva definida em termos actuais por $x^3 + y^3 = 3axy$.

Com tal disputa a humanidade ganhou o *folium de Descartes*. Esta curva admite a bissectriz dos quadrantes ímpares como eixo de simetria e passa duas vezes na origem, embora em situações diferentes, como facilmente se conclui recorrendo à definição em coordenadas paramétricas, $x = 3at/(1+t^3)$ e $y = 3at^2/(1+t^3)$: uma quando $t = 0$, outra quando t tende para infinito.

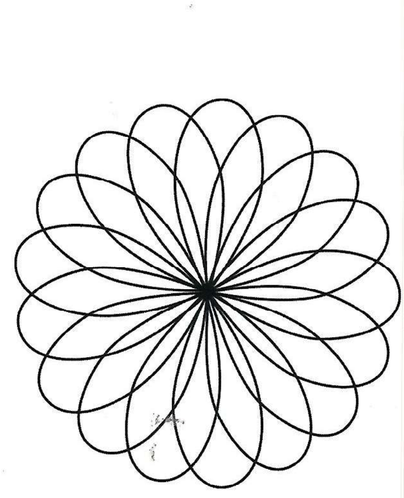


Perante o desafio de determinar a tangente a tal curva, Roberval supôs que ela se desenvolvia igualmente pelos quatro quadrantes, aliás, como Descartes supunha inicialmente, ou seja, que ela teria a forma *flor de jasmim*, nome esse que perdurou durante algum tempo. Menos poético, mas talvez mais prático, é o outro nome pelo qual tal figura é conhecida: nó de fita.

Mais tarde, em 1692, o matemático holandês Huygens (1629—1695) reconheceu a natureza assimptótica dos seus ramos, não confirmando, por isso, a hipótese admitida por Roberval. Hoje também se sabe que a área da *pétala* é igual à área do domínio situado entre os ramos infinitos da curva e a sua assimptota (a recta definida analiticamente por $x + y = a$), medindo qualquer uma delas $3a^2/2$. Recorde-se que na época em que ocorreu este episódio, 1638, ainda não se conheciam coordenadas negativas, pelo que se tem de ver esta curva apenas representada no primeiro quadrante, tal como Descartes e Roberval a estudaram.

A Rhodonea e as Rosáceas de Grandi

Grandi (1671—1742) foi um monge italiano que iniciou as suas actividades docentes em Florença, ensinando filosofia e teologia no mosteiro dos Camáldulos, uma facção dissidente da ordem dos Beneditinos. Posteriormente, exerceu a mesma actividade em mosteiros da mesma congregação, primeiro em Roma e depois, em Pisa, aonde chegou em 1700. Foi, então, mostrando cada vez maior interesse pela Matemática. Em 1707 tornou-se matemático de Cosme III de Médicis, Grão Duque da Toscana (provavelmente descendente do outro Grão Duque do século XVI, Cosme I, cujo nome ficou associado a um problema da história das probabilidades) e, volvidos outros sete anos era professor de Matemática na universidade de Pisa. Em 1728 publicou o trabalho *Flores geométricas*, que dedicou à condessa Clelia Borromeo, no qual define a *curva clélia*, que não é mais do que uma espiral esférica; em termos matemáticos, é a curva descrita por um ponto M de um meridiano de uma esfera quando ela se desloca à velocidade constante nw sobre esse meridiano e a esfera gira em torno do seu eixo à velocidade constante w; em termos intuitivos, é a curva que se obtém quando se descasca uma laranja... Para trás ficaram cinco anos de estudo, sobretudo de curvas a que deu o nome de *Rhodonea*, por serem parecidas com rosas; por vezes, são referidas como *Rosáceas de Grandi*. Estas *rosas* são definidas em coordenadas polares por $r = a\text{sen}(k\theta)$: apresentam um número infinito de pétalas se k é um número irracional, k ou $2k$ pétalas, consoante k é ímpar ou par e são a projecção no plano xOy de curvas clélias. A sobreposição de algumas dessas rosáceas produz efeitos visuais de extrema beleza. É para $k = 2$ que a *Rhodonea*, merece a classificação de *quadrifolium* e para $k = 3$, de *trifolium*.



Ainda que aparentemente fora do contexto, cabe aqui referir que Grandi, em 1701, também estudou uma outra curva, a loxodrómica cónica, curva que corta as geratrizes de um cone de revolução segundo o mesmo ângulo. Esta referência tem alguma pertinência, uma vez que cerca de duzentos anos antes, Pedro Nunes (cosmógrafo real desde 1529) e, posteriormente professor de matemática na Universidade de Coimbra, apesar de bacharel em Filosofia e Medicina) tinha apresentado pela primeira vez a ideia de curvas loxodrómicas, no pequeno tratado intitulado *Tratado em defensão da Carta de Marear*, incluído na tradução do *Tratado da esfera* de autoria de João Sacrobosco, obra essa impressa em 1537. Um bom dicionário informará que loxodromia é, enquanto termo náutico, a curva descrita por um navio que segue constantemente o mesmo rumo do vento, isto é, *cortando todos os meridianos sob um ângulo constante*; mas enquanto termo de Geometria, já se refere à curva traçada sobre uma esfera, de maneira a cortar segundo o mesmo ângulo todos os meridianos. Resta, agora, conferir as duas definições e averiguar se, eventualmete, as clélias criadas por Grandi não são mais do que curvas loxodrómicas definidas por Pedro Nunes.

As trocóides

A palavra trocóide deriva de um vocábulo grego que significa rolar. Desse ponto de vista, e apesar de Blaise Pascal (1623—1662) a ter usado para denominar a curva que conhecemos como *ciclóide* (curva descrita por um ponto de uma circunferência que rola sem deslizar mantendo-se tangente a uma recta), serão trocóides todas as curvas que se obtêm como lugares geométricos de pontos que se mantêm lligados rigidamente ao centro de uma circunferência enquanto esta rola mantendo-se tangente a rectas ou curvas sem deslizar, curvas abertas ou fechadas, por dentro ou por fora dessas curvas. Esta família admite duas sub-famílias, consoante a circunferência que rola se encontra no exterior ou no interior da circunferência fixa: a epitrocóide e a hipotrocóide. As curvas geradas por pontos da circunferência que se deslocam nas condições descritas para as trocóides, chamam-se epiciclóides ou hipociclóides, consoante a circunferência roda no plano exterior da circunferência fixa, ou no seu interior. Daí a designação de epiciclóide alongada ou epiciclóide encurtada para as epitrocóides geradas por pontos cuja distância ao centro da circunferência móvel é maior ou menor que o raio, respectivamente. Idêntica discussão merecerá o par hipotrocóide/hipociclóide: dispensamo-nos de a apresentar.

As coordenadas paramétricas de um ponto da epitrocóide gerada pelo movimento de um ponto à distância $d = |k|r$ do centro da circunferência que rola, de raio r, apoiada numa circunferência, de raio R, na hipótese de $R = nr$, são dadas por

$$\begin{aligned} x &= r(n+1)\cos(t) - k\cos[(n+1)t] \\ y &= r(n+1)\mathrm{sen}(t) - k\,\mathrm{sen}[(n+1)t] \end{aligned}$$

com $|k| < r$: positivo para epiciclóide encurtada e negativo para epiciclóide alongada. Para obter as coordenadas de um ponto da hipotrocóide gerada pelo movimento de um ponto à distância $d = kr$ do centro da circunferência que rola, de raio r, apoiada numa circunferência fixa, de raio R, na hipótese de $R = nr$, recorremos a

$$\begin{aligned} x &= r(n-1)\cos(t) - k\cos[(n-1)t] \\ y &= r(n-1)\mathrm{sen}(t) - k\,\mathrm{sen}[(n-1)t] \end{aligned}$$

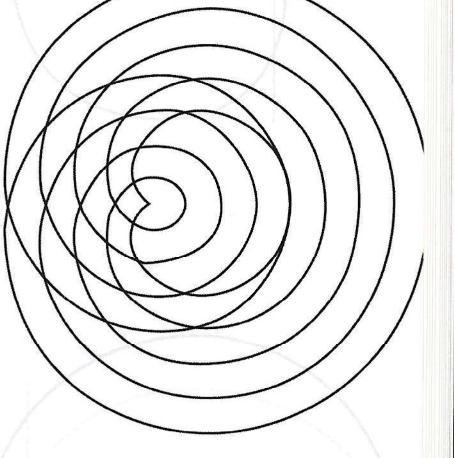
com $k < 1$ para a hipociclóide encurtada e $k > 1$ para a hipociclóide alongada.

Epitrocóides e aranhas

Dürer (1471—1528) era ainda muito jovem quando aprendeu com o seu pai a arte de ourivesaria e joelharia, a par da sua escolarização. Aos quinze anos começou a trabalhar como aprendiz de pintura e gravação em madeira com um famoso artista (Michael Wolgemut) que produzia peças para altares. Depois de uma longa digressão, de resto recomendada pelo seu professor para adquirir a experiência em contacto com outros artistas, Dürer regressou em 1495 à sua cidade natal, Nuremberga, acabando por ali tomar conhecimento do interesse que os trabalhos matemáticos de Paccioli e Leonardo da Vinci tinham para a arte. Inicia, a partir desta data, os seus estudos matemáticos; o seu particular interesse na teoria da proporção, viria a reflectir-se nos seus trabalhos artísticos a partir de 1500, a ponto de estudar com régua e compasso a construção de figuras antes de proceder à sua gravação.

Além das obras de arte produzidas, Dürer escreveu, também, livros de matemática, deixando um deles ainda em fase de provas, o *Tratado das proporções*, e que é hoje considerado o mais importante de todos os que escreveu. Num outro, publicado em 1525 e intitulado *Instrução em medições com compasso e régua*, descreve a construção de várias curvas, nomeadamente a *muschellini*, à qual nos referiremos adiante e uma outra, hoje conhecida por *aranha de Dürer*. Para construir a sua *aranha*, Dürer procedeu do seguinte modo:

- dividiu a circunferência em 12 partes geometricamente iguais, numerando-as no sentido horário;
- no extremo desses 12 raios traçou segmentos de recta geometricamente iguais de modo que, em cada ponto de divisão, o segmento de recta ficasse paralelo ao raio cujo ponto de divisão era o dobro daquele em que esse raio estava a ser traçado (ou seja: no pontos 1, o segmento era paralelo ao raio 2, no ponto 2, ao 4, no ponto 3 ao 6, no ponto 4 ao 8, ...).



O conjunto dos extremos dos segmentos de recta assim construídos é a dita curva. Ora uma epiciclóide alongada gerada na condição de ambas as circunferências — a móvel e a fixa — serem geometricamente iguais apresenta as mesmas características da aranha de Dürer; escolhendo adequadamente as constantes exigidas em ambas as construções, obtêm-se curvas geometricamente iguais.

Na figura junta estão representadas várias *aranhas* — a cada cor corresponde uma *aranha de Dürer* — todas elas geradas a partir do mesmo par de circunferências mas por pontos situados a diferentes distâncias do centro da circunferência móvel ou usando uma só circunferência e diversos valores para a constante, consoante o processo adoptado para a sua construção. Dürer é considerado um dos percursores do estudo dos movimentos do plano sobre o plano, atribuído a Besant e datado de 1869. Acresce dizer que, para valores adequados das três constantes requeridas para a construção de uma epitrocóide — raio da circunferência fixa, raio da circunferência móvel e distância do ponto ao centro desta — resulta uma rosácea de Grandi.

Epiciclóides, cardióides e nefróides

Interpretado à letra, epiciclóide significa *em forma de epiciclo*. O dicionário recentemente publicado pela Academia das Ciências de Lisboa, dá o seguinte significado de "epiciclo": *Círculo imaginário que, nos sistemas cosmológicos de Ptolomeu, se julgava descrito por um planeta, enquanto o centro deste círculo descrevia um outro em torno da Terra*. Contudo, Thomas Heath afirma que Ptolomeu (c.85?—c. 165?) se baseia *largamente* em Hiparco (180—125 a.C.) e da lista de pontos de contacto entre ambas as obras, consta, por exemplo, a teoria dos epiciclos: somos, assim, levados a concluir que já antes da era cristã os astrónomos se preocupavam com *figuras* a que davam o nome de *epiciclos* e com grande ligação à natureza — o movimento dos planetas.

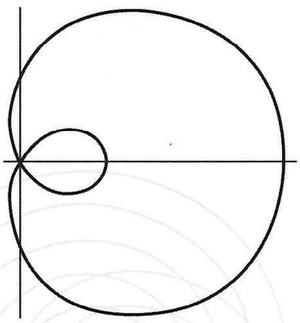
As epiciclóides não são mais do que curvas planas descritas por um ponto da circunferência quando esta rola, externamente e sem deslizar, sobre uma outra circunferência fixa, de modo que ambas as circunferências se encontrem no mesmo plano e se mantenham constantemente tangentes. Embora o enunciado pareça ligeiramente diferente do anterior, temos difinições equivalentes: se na definição do tempo de Ptolomeu subtrairmos o raio do epiciclo ao raio do *círculo deferente*, isto é, aquele que é descrito pelo centro do epiciclo, temos o raio da circunferência fixa da segunda definição.

Fazendo $k = r$ na definição paramétrica da epitrocóide e utilizando os códigos aí estipulados, as coordenadas paramétricas de um ponto da epiciclóide, são dados por

$$\begin{aligned} x &= r(n+1)\cos(t) - r\cos[(n+1)t] \\ y &= r(n+1)\mathrm{sen}(t) - r\mathrm{sen}[(n+1)t] \end{aligned}$$

Como se pode verificar, se n é um número irracional, teremos uma epiciclóide aberta, ao contrário do que se passa quando n é um número racional não inteiro:

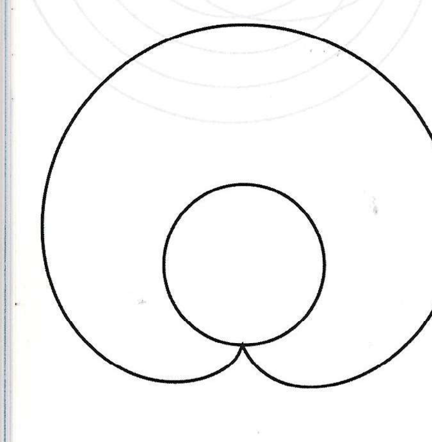
independentemente do número de voltas que a circunferência móvel tenha que dar, obtém-se uma epiciclóide fechada. Dentro das que fecham, há belas rosáceas.



Quando o raio da circunferência fixa é duplo do raio da circunferência móvel, a epiciclóide gerada chama-se nefróide, palavra que significa em forma de rim. A nefróide tem para comprimento $24r$ (representando, ainda, por r o comprimento do raio da circunferência móvel) e limita uma área de $12\pi r^2$. Huygens (1629—1695), em 1690, e o matemático e astrónomo inglês Airy (1801—1892), em 1838, apresentaram resultados relacionados com a nefróide; contudo, o seu nome data de 1878 e é da responsabilidade do matemático britânico Proctor (1837—1888).

Recorrendo a circunferências geometricamente iguais, a figura descrita pelo ponto da circunferência que rola sem deslizar chama-se *cardióide*.

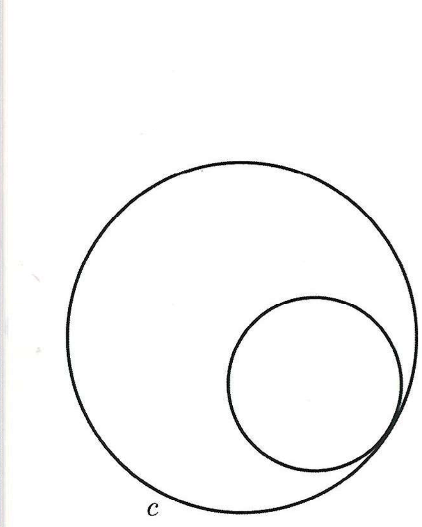
O nome de cardióide, que provém do grego *kardia* e significa *em forma de coração*, surgiu pela primeira vez em 1741, num artigo publicado em *Philosophical Transactions of the Royal Society* e assinado por Castillon (1704—1791), um matemático e astrónomo nascido em Itália, onde estudou antes de partir para a Suíça e, depois, para a Alemanha, onde veio a falecer. Na sua carreira constam os cargos de reitor da Universidade de Utrecht (1755) e de Astrónomo Real no Observatório de Berlim (1765).



A cardióide já tinha motivado alguns estudos anteriormente a esta data. Vaumesle comunicou a Huygens os resultados das suas pesquisas efectuadas em 1678 sobre o comprimento da cardióide e a área limitada por ela. Em 1708, Phillipe de La Hire (1640—1718) identificou-a como um caso particular do caracol de Pascal e atribuiu-lhe um comprimento igual a 16 vezes o comprimento do raio da circunferência, relação hoje confirmada. Porém, o primeiro estudo sobre esta curva poderá ter sido levado a cabo pelo astrónomo Ole Romer, em 1674, motivado pelo interesse em melhorar as formas utilizadas nas rodas dentadas, provavelmente com vista a uma optimização das engrenagens de que o seu trabalho dependia. Hoje sabe-se, também, que a cardióide delimita uma área equivalente a 6 círculos base. Este e outros resultados constam de uma tese publicada em 1900, por M. Archibal: *A cardióide e algumas curvas relacionadas com ela*. A cardióide é a curva que pertence a mais famílias; a seguir, vem a *lemniscata de Bernoulli*.

Hipociclóides e a Mosca de La Hire

Philippe de La Hire (1640—1718), arquitecto, astrónomo e pintor, nascido em França, deixou entre outros, um trabalho sobre epiciclóides (1694) e outro sobre concóides (1708); além disso, mostrou a utilidade das concóides em engrenagens e na transmissão de movimento.



c

Associado ao seu nome, temos um resultado conhecido como *Mosca de La Hire*: todo o ponto (uma mosca, por exemplo) de uma circunferência de raio r que role sem deslizar no interior de uma outra circunferência de raio $2r$, mantendo-se-lhe tangente, descreve um diâmetro desta.

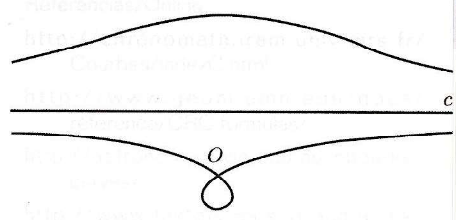
As condições de movimento agora descritas diferem das que definem a epiciclóide apenas na posição relativa das duas circunferências — antes eram tangentes exteriores, agora pretendem-se tangentes interiores; antes tinhamos uma epiciclóide, agora temos uma hipociclóide.

Ora no caso particular da relação estabelecida entre ambos os raios, um o dobro do outro, temos uma recta, a tal que suporta a trajectória da *mosca de La Hire*, que mais não é do que uma hipociclóide degenerada. De resto, qualquer que seja a distância do ponto gerador da curva ao centro da circunferência móvel, desde que a relação entre os raios das circunferências seja o estipulado, a figura descrita é uma elipse.

La Hire valeu-se da natureza, não para nomear um resultado como é visível noutras secções, mas para esclarecer ou dar aplicabilidade ao seu modelo.

As concóides e o caracol de Pascal

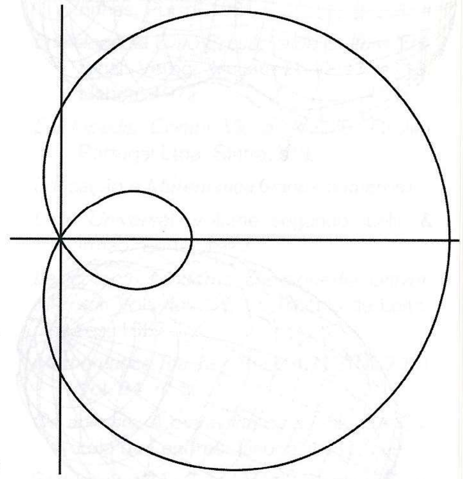
As concóides são curvas com dois ramos, geradas a partir de uma linha qualquer, c, de uma constante k e de um ponto, O. Seja P um ponto da linha c e Q o ponto marcado na recta OP à distância dada, k, desse ponto P: o conjunto dos pontos Q, obtidos à medida que P se desloca na linha, chama-se concóide da linha c de pólo O e constante k. Como em cada recta existem dois pontos igualmente afastados de um outro ponto dessa mesma recta, esta definição dá, de facto, origem a uma curva com dois ramos. Em coordenadas polares, as concóides da recta têm para definição $r = k + a/\cos(\theta)$, onde a representa a distância do pólo à recta.



A palavra concóide significa em forma de concha. Nicomedes, matemático grego (c. 280—c. 210 a.C.) ficou com o seu nome associado a uma concóide, conhecida também por concóide da recta, talvez a mais antiga de todas as que chegaram aos nossos dias. Para a obter, e tal como o nome indica, recorreu a uma recta — que é a assímptota a ambos os ramos da concóide — e um ponto exterior a essa recta. Com essa concóide pretendeu resolver dois dos mais importantes problemas da antiguidade: a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo.

Utilizando uma circunferência e um ponto sobre ela, e procedendo como indicado anteriormente, obteremos a concóide da circunferência, assim designada na antiguidade, hoje conhecida por *caracol de Pascal*. Foi Roberval quem, em 1650, propôs que o nome de Étienne Pascal (1588—1651), pai de Blaise Pascal, ficasse eternamente ligado a esta curva, homenageando desse modo aquele que a tinha estudado de um modo tão exaustivo. Há autores que identificam a curva designada por *caracol de Pascal* com a *aranha de Dürer*. O tratamento em coordenadas paramétricas da linha obtida pelo processo de Dürer, permite concluir que, utilizando uma circunferência de raio k e constante igual a $a/2$, se obtém a relação

$$r = k + a\cos(\theta)$$



precisamente a relação que resulta quando se trata de igual modo analítico à linha gerada pelo processo da concóide à custa de uma circunferência de diâmetro a e da constante k. Philippe de La Hire reconheceu que a concóide gerada quando $k = a$, é uma cardióide; isto equivale a definir a cardióide como um caracol de Pascal no qual a constante é a medida do raio da circunferência.

Independentemente da construção utilizada, Pascal e Nicomedes não foram os únicos a estudar concóides e nem só de rectas ou de circunferências se definem concóides: existem, por exemplo, concóides de rosáceas.

René de Sluze (1622—1685) nasceu na Bélgica e frequentou a Universidade de Lovaina durante quatro anos; já graduado em leis, estudou línguas, matemática e astronomia em Roma. Depois de ser ordenado sacerdote, atingiu o cargo de conselheiro do Bispo de Liége; aos 44 anos, foi nomeado abade de Amay. Entre os muitos trabalhos de matemática que produziu, construiu em 1662 uma curva denominada *concóide de Sluze*.

Cabe aqui, completar uma referência a Dürer: a sua *muschellini*. Ela é gerada pelos extremos de um segmento de recta que se desloca de modo a que dois determinados pontos se mantenham sobre os eixos coordenados.

As ovais

As ovais são curvas descritas por pontos cuja posição está relacionada com dois pontos fixos. Ao longo de vários anos, embora variando a perspectiva, todos os planos curriculares desenhados em Portugal incluíam, na disciplina de Matemática, o estudo de uma delas, a elipse. Porém, fixadas outras exigências sobre a distância a dois pontos fixos, nasce uma família à qual a elipse pertence.

Ovais de Descartes

Representando por r e r' a distância de um ponto P a dois pontos fixos, e por a e b dois números reais não nulos, e por k uma constante, a oval da Descartes será constituída pelos pontos do plano cujas distâncias cumprem a seguinte relação:

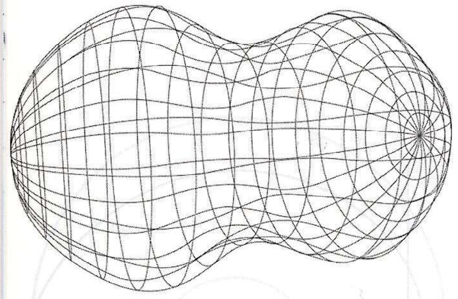
$$ar + br' = k.$$

Estas curvas foram introduzidas por Descartes numa das obras — *Dioptrique* — na qual ocupam um lugar de relevo. Escolhendo na definição $r = r'$, reconhecemos de imediato a condição definidora da elipse para a qual apenas falta relacionar a soma constante com a distância entre os pontos fixos; e tomando r e r' simétricos um do outro, e igual precaução, já se obtém a definição usual da hipérbole.

Matematicamente, podemos procurar transformar a expressão geral definidora destas curvas. Tomando para centro o ponto O, ponto médio do segmento de recta definido pelos dois pontos fixos, para eixo a semi recta de origem em O que passa num desses pontos e para unidade de medida metade da distância entre esses pontos fixos, no sistema de coordenadas polares assim caracterizado, a definição bipolar dada converte-se em

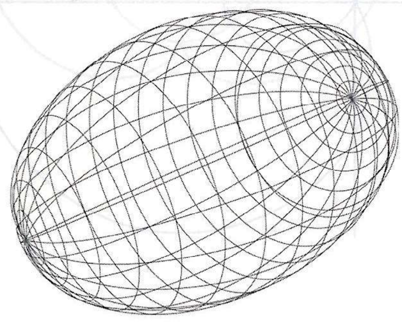
$$(r')^2 = r^2 + 4 - 4r\cos(\theta)$$

Fácil é verificar que, escolhidos adequadamente os valores de r e de r', desta relação saem as definições usuais da elipse e da hipérbole: basta escolher $r + r' = 3$ e $r - r' = 1$, respectivamente. Curiosamente, além de uma curva fechada e de uma curva aberta, também é possível obter a partir destas ovais uma curva fechada com dois ramos: fazendo $2r + r' = 4$ obtém-se, precisamente, um caracol de Pascal.



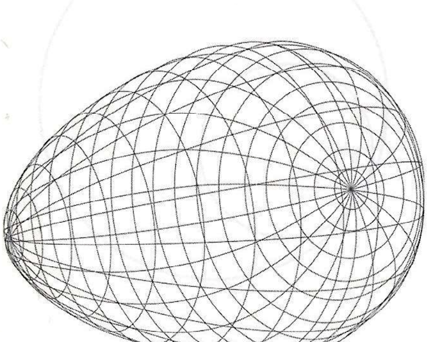
Ovais, ovos, amendoins, melões

Notícias recentes, informavam sobre as tempestades de Júpiter filmadas pela *sonda de Cassini*. À imagem e semelhança da designação de uma outra sonda, *sonda de Galileu*, também Cassini é um nome ligado à Astronomia, em particular ao movimento dos astros, e diz respeito a dois astrónomos, pai e filho, Jean Dominique (1625—1712) e Jacques (1677—1756), respectivamente. Jean Dominique, natural de Itália, onde estudou, viria a falecer em Paris, já naturalizado francês, para onde se tinha deslocado aos 44 anos a convite do rei Luís XIV. Ainda em Itália, foi professor de Astronomia na universidade de Bolonha e há conhecimento de uma publicação sobre a observação de um cometa, efectuada no observatório de Panzano. Já em França, foi director do Observatório de Paris, tendo sido o primeiro astrónomo a observar as quatro luas de Saturno.



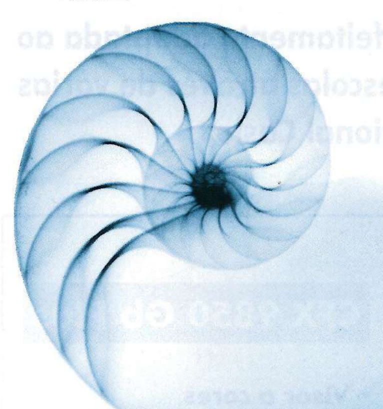
Adepto da teoria geocêntrica, Jean Dominique Cassini pensava que o Sol se deslocava descrevendo uma oval da qual a Terra ocupava um dos focos. Essa oval, hoje conhecida como *oval de Cassini*, é definida como o lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias a dois pontos fixos têm produto constante. O facto desta definição se obter da definição de elipse apenas por substituição de "soma" por "produto", justifica que também seja conhecida, também, por *elipse de Cassini*. Designando por $2a$ a distância entre os dois pontos de referência e por k^2 a constante, a equação cartesiana da oval de Cassini é

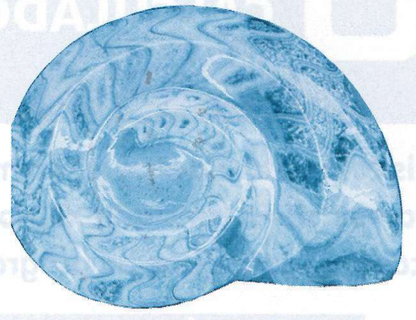
$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 - k^4 = 0.$$



Consoante a relação de grandeza entre a e k, estas curvas são formadas por um só arco ($a < k$) ou por dois arcos afastados ($a > k$) ou com um ponto comum ($a = k$). Neste último caso, tem a forma conhecida como *Lemniscata de Bernoulli*, curva que Jacob Bernoullie (1654—1705), matemático suíço de uma família com numerosos matemáticos, deu a conhecer em 1694 num artigo publicado em *Acta Eruditorumon*, sem que tivesse feito qualquer ligação aos trabalhos de Cassini; como tinha a forma de um oito ou de um laço feito com uma fita, atribuiu-lhe o nome latino de *Lemniscus*. A relação entre as duas curvas levou 100 anos a ser estabelecida e para ela terão contribuído os trabalhos de Giovanni Fangano (em 1750) e de Euler (em 1751). Esta família de curvas pode ser obtida por secções planas do toro: um plano paralelo ao eixo do toro que se desloque a partir do centro do mesmo, vai dando, sucessivamente, os três membros desta família. Quando Cassini estudou estas curvas, por certo não imaginaria que elas algum dia viessem a ser associadas a melões, amendoins e ovos. Mas assim aconteceu: as figuras que se obtêm por rotação, em torno do seu eixo, das *ovais de Cassini* definidas quando $a < k$, $a = k$ e $a > k$ foram baptizadas respectivamente como *melão, amendoim* e *ovo*.

Náutilo





Amonite fóssil

As espirais e a concha do Nautilus

Em termos não específicos, podemos afirmar que uma espiral é uma curva que *enrola e foge*: o ponto que a descreve roda em volta de um outro ponto, O, afastando-se simultaneamente desse ponto. Matematicamente, são curvas planas cuja definição analítica em coordenadas polares é do tipo $r = f(t)$, em que f é uma função estritamente monótona. Entre os vários matemáticos que as estudaram encontram-se Arquimedes (287—212 a.C.), Pierre de Fermat, Jacob Bernoulli e Pierre Varignon (1654—1722). As espirais estudadas por estes quatro matemáticos são definidas por funções de tipos diferentes, consequentemente, com características diferentes: a primeira é dita uma espiral linear ($r = at$, $a \neq 0$, $a \neq 1$), a segunda, parabólica ($r^2 = at$, $a \neq 0$, $t \geq 0$), a terceira, logaritmica ($r = a^t$, $a > 0$, $a \neq 1$), e a quarta, hiperbólica ($r = a/t$, $a \neq 0$).

Frequentemente se tem associado a *espiral de Benoulli* à concha de um cefalópode existente a cerca de 100 metros de profundidade na zona indo-pacífica (onde desce a grandes profundidades), aliás a única espécie dessa família que ainda não se libertou da concha. Há também quem a associe a um outro cefalópede, o amonite, que, ao contrário do que acontece com o náutilo, se dá como desaparecido desde o período Cretácio superior, mas cuja concha ainda é observável através de belos fósseis (este cefalópode terá surgido no período Devónico inferior, o que significa que existiu durante cerca de 350 milhões de anos e atravessou duas eras geológicas). Segundo alguns biólogos, a ordem a que pertencem os amonites, a Amonóidea, diverge da ordem hoje representada pelo náutilo, a Nautilóidea (que apareceu no período Câmbrico, portanto cerca de 570 milhões de anos a.C.), o que justifica não só as analogias como eventuais diferenças resultantes, também, da evolução animal. Em ambos os casos, as conchas depois de seccionadas, apresentam esta particularidade: estão divididas em compartimentos cujas divisórias seguem uma espiral de Bernoulli.

PS1: Os exemplos apresentados pretendem ilustrar a ajuda que a natureza tem dado aos matemáticos, por vezes apenas para nomear ou ajudar a comunicar resultados. Entretanto no campo da modelação, encontraremos outro tipo de relação: estaremos no espaço em que a Matemática poderá ajudar a interpretar funcional e quantitativamente a Natureza; então, será aí que o Homem poderá retribuir à Natureza a ajuda prestada até agora, fornecendo resultados que bem interpretados e melhor aplicados contribuirão para a sua protecção e conservação.

PS2: A inclusão de leis matemáticas é intencional. Uma simples calculadora gráfica permite facilmente visualizar as curvas referidas tomando a variável diferentes intervalos e constatar as consequências desses ensaios (daí, também, a ausência de domínio na maioria delas!). Por seu lado, aplicações de Geometria Dinâmica, nomeadamente *The Geometer's Sketchpad* ou o *Cabri*, permitem a geração das curvas a partir das definições de carácter geométrico dadas, a verificação das medidas fornecidas ou o estudo das suas propriedades.

Referências/Online

http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/Courbes/indexC.html

http://www.geom.umn.edu/docs/reference/CRC-formulas/

http://astronomy.swin.edu.au/pbourke/curves/

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html

http://perso.club-internet.fr/rferreol/encyclopedie/courbes2d/courbes2d.shtml

http://www.xahlee.org/SpecialPlanesCurves_dir/specialPlaneCurves.html

Outras referências

A terra: O Planeta desconhecido. Círculo de Leitores. Lisboa, 1987.

Boyer, Carl. *História da Matemática*. S. Paulo, 1974

Dedron, Pierre, Itard, Jean. *Mathématiques et Mathématiciens*

Dicionário da História de Portugal, vol IV. Direcção de Joel Serrão. Livraria Figueirinhas. Porto, 1981.

Enciclopédia Luso Brasileira de Cultura. Editorial Verbo. Volumes1, 2, 3 e 13. Lisboa, 1972

Eciclopédia Combi Visual, Vol. 6. Grolier Portugal Ltda. Sintra, s/d.

Educação e Matemática (vários números).

Lello Universal. Volume segundo. Lello & Irmão. Porto, 1973.

Lexicoteca: Moderna Enciclopédia Universal. Volumes 1 e 13. Círculo de Leitores, 1987.

Mathematics Teacher, Reston, NCTM, 2001 Vol. 94, nº 5.

Os animais: A maravilha da adaptação. Círculo de Leitores. Lisboa, 1987.

Sedgwick, W.T., Tyler, H.W., Bigelow, R. P. *História da Ciência*. Editora Glôbo.

Teixeira, Gomes. *Obras sobre Mathematica*, Volume setimo. Coimbra, 1915

The New Caxton Encyclopedia. Vol. 1, 14. Caxton Publications Limited. London, 1979

The New Junior World Encyclopedia. Vol. 12, London & Sydne, Bay Books, 1979.

Veloso, Eduardo. *Geometria: temas actuais: materiais para professores*. Lisboa, IIE. 1998

Maria José Costa
Esc. Sec. Augusto Gomes