

O que já não tenho dúvidas é de que não é nada fácil descrever matematicamente os fenómenos da natureza, mesmo aqueles que nos parecem evidentes. Quase sempre a natureza acaba por não se adaptar completamente aos nossos *brilhantes* raciocínios e às nossas conjecturas *perfeitas*.

Sempre gostei dos fenómenos naturais e portanto de meteorologia (mas, confesso já, os meus conhecimentos sobre o assunto são bastante limitados). Tenho vários instrumentos em casa e o meu preferido é um termómetro que dá a temperatura no interior e no exterior, podendo também mostrar as máximas e mínimas desde o momento por nós escolhido. Por isso, quase todos os dias vou ver quais foram as temperaturas extremas.

No entanto, há já algum tempo que me interrogava como evoluiria a temperatura do ar ao longo de um dia *normal*. O sentido que dou a normal é um dia calmo, sem alterações súbitas do tempo. Tinha feito algumas conjecturas: haveria um máximo a meio da tarde, um mínimo a meio da noite, seriam praticamente iguais as temperaturas às 0 horas e à mesma hora do dia seguinte e, se não houvesse súbita mudança meteorológica, no dia seguinte a situação repetir-se-ia quase sem alterações.

A função tempo/temperatura teria portanto de ser cíclica. Uma boa hipótese era uma função sinusoidal. Certa vez, quando discuti esta questão com o Hélder Martins, ele também sugeriu logo uma função deste tipo.

Ao trabalho

Um destes dias resolvi tirar isto a limpo. Actualmente, não há qualquer dificuldade mesmo para quem não tenha grandes instrumentos meteorológicos. O CBL2 e uma calculadora TI-83 são suficientes.

Natureza Difícil

José Paulo Viana

Preparei então o material. Liguei a TI-83 ao CBL2 e coloquei um sensor de temperatura no canal 1 do CBL2. Na calculadora fui à tecla APPS buscar a aplicação CBL/CBR que serve para trabalhar com os instrumentos de recolha de dados e, no menu principal, escolhi a opção DATA LOGGER (registo de dados).

```
APPS
1: Finance...
2: CBL/CBR
3: Interact
4: Organize
5: Periodic
6: Portug
```

```
CBL/CBR APP:
1: GAUGE
2: DATA LOGGER
3: RANGER
4: QUIT
```

Agora era preciso dar as instruções para a experiência pretendida. Escolhi fazer registos de quarto em quarto de hora (900 segundos), o que significava 97 registos (4 x 24 mais um para comparar a temperatura às 0 horas do dia escolhido com a temperatura às 0 horas do dia seguinte).

Activei então o sensor de temperatura; número de registos: 97; intervalo entre registos: 900; unidade: grau celsius; gráfico: em tempo real (para se ir vendo o que acontecia ao longo do dia).


```

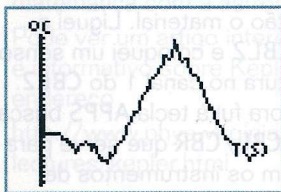
PROBE: Light
Volt Sonic
#SAMPLES: 97
INTRVL(SEC): 900
UNITS: °F
PLOT: RealTime End
DIRECTNS: Off
GO...

```

Consultada a previsão meteorológica, vi que o dia 9 de Setembro de 2001 estava de acordo com o pretendido: céu limpo, sem alteração prevista das temperaturas extremas.

Exactamente às 0 horas desse dia carreguei na instrução GO... e a máquina iniciou os registos.

Precisamente às 24 horas o programa terminou e pude ver o gráfico.



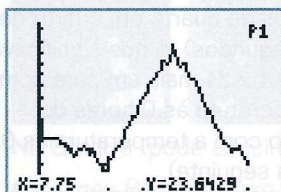
As temperaturas estavam na lista TEMP e os tempos em TTEMP. Como a unidade usada para o tempo era o segundo e dá muito mais jeito trabalhar em horas, criei a lista HORAS, dividindo a lista original TTEMP por 3600.

```

LTTEMP/3600 -> LHOR
AS

```

Com a nova lista fiz outro gráfico e usando TRACE fui à procura das temperaturas extremas e respectivas horas.

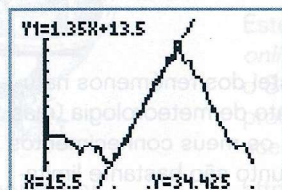


9.Set

A mínima foi de 23,6° às 7h45 e a máxima 34,7° às 15h30. Começavam as surpresas. Se a máxima era à hora esperada (a meio da tarde), já a mínima não correspondia de modo nenhum à previsão de ser a meio da noite. Fui ao jornal e vi que o nascer

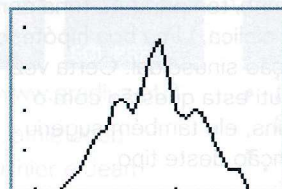
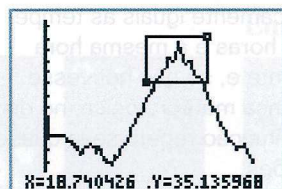
do sol tinha sido às 7h13. A temperatura tinha descido, com algumas oscilações, até um pouco depois do sol aparecer. E agora o intervalo de tempo entre o mínimo e o máximo da função era $15h30 - 7h45 = 7h45$ horas e portanto muito longe das 12 horas que tinha previsto.

Pior ainda, observando o gráfico vemos que a partir das 7h45 a temperatura cresce quase uniformemente. O gráfico confunde-se com uma recta. Com alguns cálculos simples encontra-se uma recta que se ajusta quase perfeitamente



A temperatura cresce cerca de 1,35° por hora. Atingido o máximo, decresce também quase uniformemente até às 22 horas, bastante depois do pôr do sol (que foi às 19h55). Ou seja, das 7h45 às 22h, a função é constituída por dois ramos cujos gráficos são rectas. Durante a noite, embora com algumas oscilações, a temperatura vai decrescendo lentamente.

E já agora reparemos numa curiosidade. Na zona superior do gráfico há umas imperfeições quase simétricas. Fazamos um ZOOM para ver melhor.



Que terá acontecido? Passaram umas nuvens?

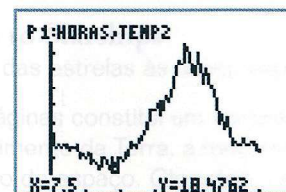
Bem, voltemos ao essencial. Estamos então muito longe de um gráfico sinusoidal. Será sempre assim ou isto foi excepcional?

Mais trabalho

O melhor era avançar com novas experiências.

Foi o que fiz a 11 de Setembro (o dia em que o mundo mudou, segundo a primeira página do jornal *Público*) e depois a 14 de Setembro.

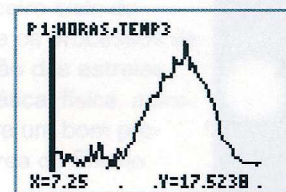
O dia 11 foi um pouco diferente. O céu esteve nublado quase toda a manhã e houve nuvens dispersas durante a tarde.



11.Set

A temperatura começou a subir às 7h30 e a máxima 25,4° foi novamente às 15h30.

O dia 14 foi um dia limpo e quente.



14.Set

A temperatura começou a subir às 7h15, atingindo um máximo de 27,7° às 15h30.

As semelhanças entre os gráficos dos três dias são muitas. Subida quase uniforme desde o nascer do sol até às 15h30; descida a partir daí, também bastante regular, até cerca de duas horas depois do sol se pôr; ligeira descida da temperatura durante a noite, com o mínimo perto do nascer do sol.

Fiquei desgostoso: a minha bela conjectura tinha ido por água abaixo. O modelo não poderia ser de modo nenhum uma senoide. E para o descobrir precisava de fazer mais experiências. Vai ser preciso prolongar a investigação por muito mais tempo.

A duração do dia

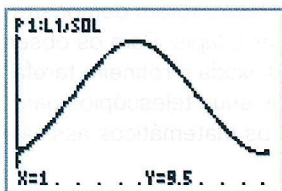
Fiquei com vontade de encontrar algum fenómeno natural que fosse sinusoidal.

Lembrei-me de um problema, proposto na 1ª chamada da 1ª fase do exame de 12º ano de 2000, onde aparecia uma função que dava, para Lisboa, a duração do dia (entre o nascer e o pôr do sol) ao longo do ano.

Por sorte, aqui há uns meses o Sérgio Valente, que sabe do meu gosto por estes fenómenos, tinha-me oferecido um exemplar dos "Dados Astronómicos para Almanagues de 2000", editado pelo Observatório Astronómico de Lisboa. É um livrinho interessantíssimo, com imensas informações: constantes astronómicas, calendários católico, israelita e islâmico, entrada do sol nos signos de zodiaco, fases da lua, enxames de meteoróides, eclipses, nascimento e ocaso da lua em Lisboa e, felizmente, as horas, com aproximação ao minuto, de nascimento e ocaso do sol em sete cidades portuguesas, entre as quais Lisboa.

Com um pouco de trabalho (mas tinha de ser...), fiz as subtrações entre os instantes de nascer e pôr do sol e converti os minutos em horas para obter a tabela com a duração dos 366 dias de 2000. Esses dados foram colocados na calculadora na lista SOL.

Construí em L1 uma lista com os números de 1 a 366, correspondente aos dias do ano. O gráfico obtido foi este.



Que bela sinusóide!

Agora era preciso encontrar uma função que se adaptasse a estes dados. A função seria do tipo

$$f(x) = A + K \operatorname{sen}[B(x - D)]$$

Claro que poderia tentar usar a regressão sinusoidal da calculadora para chegar à função, mas pareceu-me mais interessante pensar um bocado e descobrir os parâmetros através do que eles representariam. Nota: descobri mais tarde que a calculadora, por motivos que ainda não averiguei, não conseguia fazer a regressão sinusoidal...

Como o seno varia entre -1 e 1 , a função vai variar entre $A - K$ e $A + K$, logo A representa a duração média dos dias em Lisboa.

Pedindo os cálculos estatísticos da lista SOL, vem:

```
1-Var Stats
x=12.19043716
Σx=4461.7
Σx²=55664.0033
Sx=1.86821273
σx=1.865658781
n=366
```

```
1-Var Stats
n=366
minX=9.45
Q1=10.36666667
Med=12.21666667
Q3=14.01666667
MaxX=14.883333
```

O dia mais curto tem 9,45 horas, o mais longo 14,88 e o dia médio 12,19 horas.

Logo, $A = 12,19$.

O parâmetro K está relacionado com a latitude do lugar. Quanto maior for a latitude, maior será o valor de K . Mas K tem também a ver com os dias mais curto e mais longo do ano, ou seja, com os extremos da função. Com efeito, o máximo será $A + K$ e o mínimo $A - K$. Então:

$$2K = 14,883 - 9,45$$

Logo, $K \approx 2,72$

Quanto ao parâmetro B , sabemos que tem a ver com o período. Uma função do tipo $\operatorname{sen}(Bx)$ tem período $2\pi/B$. A função que procuramos tem período 366. Bem, na realidade, tem período aproximadamente igual a 365,24 mas simplificaremos.

Logo, $B = 2\pi/366 \approx 0,0172$.

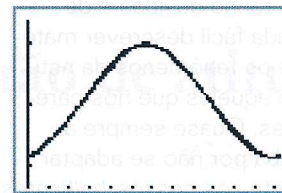
Finalmente, falta o parâmetro D , que provoca o deslocamento horizontal do gráfico. Para o encontrar, lembremos que o dia médio, que ocorre quando $\operatorname{sen}[B(x - D)] = 0$, deve corresponder ao equinócio da Primavera que, em 2000, ocorreu no dia 20 de Março. Este dia é o 80º dia do ano.

Logo, $D = 80$.

Vejamos se funciona...

Quase perfeito! Fiquei satisfeitíssimo.

```
Plot2 Plot3
Y1=12.19+2.72sin
n(0.0172(X-80))
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```



Voltam as dúvidas

Passado pouco tempo, ao analisar com mais detalhe os valores obtidos, comecei a descobrir vários aspectos estranhos.

O dia médio (12,19) era diferente do dia mediano (12,22), diferente do dia do equinócio da Primavera (12,15) e do dia do equinócio de Outono (12,13). Ora, julgava eu, estes valores deveriam ser todos iguais...

Por outro lado, tinha aprendido nas minhas aulas de Geografia que o dia médio, em qualquer parte do mundo, é de 12 horas. Ora, o valor obtido (12,19) excede o previsto em mais de 11 minutos.

Fiquei intrigado e preocupado. O que seria o dia médio? Em que momentos começa e acaba um dia? Quando o centro do sol toca a linha do horizonte?

Fui consultar melhor os dados astronómicos. O que estava lá escrito era "Nascimento e ocaso do Sol (bordo superior)". Afinal não era o centro do sol que contava, era o bordo superior. Mas pareceu-me que isso não alterava nada.

Umás horas depois, fez-se luz (do sol?) no meu espírito. O bordo superior do sol no nascimento não corresponde ao bordo superior no ocaso. Então, à duração média prevista de 12 horas torna-se necessário acrescentar o tempo que, por exemplo, no ocaso ocorre entre o momento em que o bordo inferior toca na linha do horizonte até ao momento em que o bordo superior desaparece.

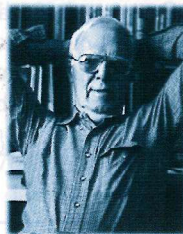
Alegrei-me. Mas por pouco tempo. É que me lembrei que o intervalo de tempo em que o sol se está a pôr

é muito inferior a 11 minutos (pelo menos do que eu me lembro...).

Infelizmente, ainda não tive oportunidade de ir ver um pôr do sol junto ao mar, munido de um cronómetro, para confirmar isto tudo.

O que já não tenho dúvidas é de que não é nada fácil descrever matematicamente os fenómenos da natureza, mesmo aqueles que nos parecem evidentes. Quase sempre a natureza acaba por não se adaptar completamente aos nossos *brilhantes* raciocínios e às nossas *conjecturas perfeitas*. Cada investigação que fazemos obriga-nos a ir ainda mais longe, se queremos entender com profundidade aquilo que se passa à nossa volta. Mas, é claro, são estes desafios constantes que fazem da investigação uma actividade tão estimulante.

José Paulo Viana
Esc. Sec. de Vergílio Ferreira



A matemática não só é real como é a única realidade. Isto é, todo o universo é obviamente constituído de matéria. A matéria é constituída por partículas. Estas são constituídas por electrões, neutrões e protões, logo todo o universo é constituído por partículas. E agora, de que serão feitas as partículas? Não, não surgem do nada. A única coisa que podemos realmente dizer sobre um electrão é a que decorre da enumeração das suas propriedades matemáticas. Em certo sentido podemos dizer que a matéria se dissolve, restando apenas a sua estrutura matemática.

Martin Gardner

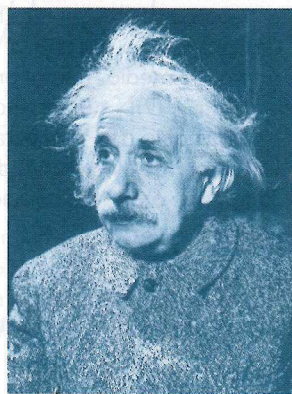
Onde existe matéria
existe geometria

Johannes Kepler



A descoberta do planeta Neptuno em 1846 foi resultado espectacular e excitante da astronomia matemática. A própria existência deste novo membro do sistema solar e a sua localização exacta, foram demonstradas com papel e lápis. Para os observadores foi deixada a rotineira tarefa de apontar os seus telescópios para o ponto que os matemáticos assinalaram

James R. Neumann



Quanto mais as leis matemáticas se referem à realidade menos certas são, quanto mais certas são menos se referem à realidade.

Albert Einstein