

A Matemática e a Vida

Carlos Braumann



Introdução

O Homem é um voraz perguntador, a sede do conhecimento faz parte da sua natureza. Essa curiosidade produz conhecimentos que podem ser aplicados em proveito próprio. Mas o inverso também é verdadeiro, a necessidade de aplicação leva à procura do indispensável conhecimento. Este círculo virtuoso ajuda a compreender como esta característica foi seleccionada ao longo da evolução (natural) e como o sucesso e a marca do Homem, mais do que em qualquer outra espécie, estão indissociavelmente ligados a esse espírito inquiridor e à inteligência que lhe está associada. A Matemática evoluiu (culturalmente) de forma semelhante, alimentada pela sede de conhecimento da própria Matemática e pela utilidade desse conhecimento para a compreensão das outras Ciências. Há uma clara simbiose entre a Matemática e as diversas Ciências que dela fazem uso. A Biologia não é excepção.

Desde como crescem e se extinguem populações de seres vivos, interagindo entre si e com outras populações de presas ou predadores, de parasitas ou simbiotes, como se propaga uma epidemia, como evolui a estrutura demográfica e genética de uma população, como decorrem os fenómenos fisiológicos num organismo, como se desenvolve um ser vivo complexo com órgãos diferenciados a partir de uma única célula inicial até ao estudo do funcionamento de redes neuronais ou mais ambiciosamente de um cérebro, tudo isso requer hoje a utilização de modelos e métodos matemáticos. Como também a própria experimentação científica e a pesquisa sobre os fenómenos da natureza, desde a sequenciação do ADN à caracterização de um ecossistema, requerem metodologias matemáticas e estatísticas.

Sem a Matemática, o conhecimento do mundo biológico seria hoje muito limitado e importantes aplicações desse conhecimento, desde a preservação e conservação de espécies e ecossistemas, à exploração racional dos recursos naturais, à organização dos sistemas escolares e de segurança social (tendo em conta a evolução demográfica das populações humanas), à prevenção e combate a doenças e a epidemias, estariam fora do nosso alcance.

Reciprocamente, a Biologia tem sido o impulso motivador do desenvolvimento de vários métodos e teorias matemáticas. Considero que é útil que quem estuda ou ensina Matemática conheça, para além dos tradicionais exemplos de aplicação em Física ou em Economia, um pouco das aplicações biológicas da Matemática, tanto mais que estas tiveram um extraordinário desenvolvimento no século recentemente terminado e tê-lo-ão ainda mais no que ora se iniciou, com proveito para a Biologia e para a Matemática e outras Ciências e com utilidade para a melhoria da qualidade de vida.

Num pequeno artigo como este não seria obviamente possível senão falar de algumas das aplicações mais simples. Para o leitor interessado, a pequena

Há uma clara
simbiose entre a
Matemática
e as diversas
Ciências que dela
fazem uso.
A Biologia não é
excepção

4. O que se passará em F...
5. A tabela apresenta da...

bibliografia apresentada será um ponto de partida para a exploração deste vasto campo de aplicação da Matemática, hoje objecto de uma imensa bibliografia e muito activo em termos de investigação.

Crescimento populacional

O exemplo mais simples seria o de uma população de seres vivos crescendo sem limitações alimentares ou territoriais num ambiente constante e sem migrações. Seja $N(t)$ o tamanho da população no instante t . O tamanho pode ser medido pelo número de indivíduos, pela biomassa ou pela densidade da população, conforme seja mais conveniente.

Suponhamos que a reprodução pode ocorrer continuamente no tempo. Cada indivíduo, num pequeno intervalo de tempo Δt , tem uma prole média de aproximadamente $f\Delta t$ indivíduos, onde f é a taxa de natalidade (número de filhos de um indivíduo por unidade de tempo). Há que ter cuidado nas contas quando a reprodução é sexual, pois, por cada descendente que um indivíduo tenha, só metade lhe deve ser atribuída, devendo a outra metade ser atribuída ao outro progenitor. Naquele intervalo, nascerão em média aproximadamente $f\Delta tN(t)$ indivíduos.

No mesmo intervalo de tempo, a probabilidade de um indivíduo morrer será aproximadamente $m\Delta t$, onde m é a taxa de mortalidade, pelo que morrerão em média aproximadamente $m\Delta tN(t)$ indivíduos. A população no instante $t + \Delta t$, $N(t + \Delta t)$, será então aproximadamente

$$N(t) + f\Delta tN(t) - m\Delta tN(t) = ((1 + r)\Delta t)N(t),$$

com $r = f - m$ (taxa de crescimento), isto é, obtém-se do valor no instante t multiplicando-o por uma constante. É a tradução matemática do ditame "Crescei e multiplicai-vos". Se $r > 0$, a população cresce, se $r < 0$, a população decresce e, se $r = 0$, a população mantém-se.

A taxa média de crescimento da população no intervalo $]t, t + \Delta t[$, $(N(t + \Delta t) - N(t))/\Delta t$ será aproximadamente $rN(t)$. Fazendo $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos a derivada $dN(t)/dt = rN(t)$, que diz que a taxa instantânea de crescimento da população é proporcional ao tamanho da população, sendo r a constante de proporcionalidade. Pode obter-se a solução desta equação diferencial. Usando a nova variável $Y(t) = \ln(N(t)/N(0))$ e as regras de derivação da função composta, vemos que $dY(t)/dt = (dN(t)/dt)/N(t) = r$, isto é, a constante r é a taxa instantânea de crescimento *per capita* (taxa instantânea de crescimento da população dividida pelo tamanho da população). Daqui resulta que $Y(t) = rt + \text{constante}$. Como $Y(0) = 0$, a constante é nula, pelo que $Y(t) = rt$, donde se conclui que o crescimento da população é exponencial ou malthusiano $N(t) = N(0)e^{rt}$ (se discretizarmos o tempo, temos uma progressão geométrica para o crescimento da população, conforme Malthus indicava).

Se bem que trivial para o Professor de Matemática, este exemplo de aplicação do conceito de derivada e das regras de derivação poderá não ser propriamente tão trivial para o aluno, mas, rodeado das devidas cautelas, permitirá ao aluno ver a construção de um modelo matemático e a sua utilização para efeitos de previsão. O mesmo modelo matemático se aplica exactamente a um capital sujeito continuamente a juros compostos, com a diferença que $N(t)$ representa o capital no instante t , f é a taxa instantânea de juro e $m = 0$. Não confundir f com as taxas de juros publicitadas de depósitos, que são compostos discretamente e não continuamente no tempo, embora, se o prazo de depósito for curto, os valores pouco difiram. Já agora, como exemplo, qual será melhor para um depósito a prazo, um depósito a um ano com taxa de juro de 6,1% ao ano ou um depósito a um mês com taxa de juro de 6% ao ano? Devido à retenção de 20% dos juros para IRS, a taxa de juro líquida é de $(6,1\% \text{ ao ano}) \times 0,8 = 4,88\% \text{ ao ano}$ e de $(6\% \text{ ao ano}) \times 0,8 = 4,8\% \text{ ao ano}$, respectivamente. Ao fim de um ano, o capital do primeiro é $N(1) = N(0) \times (1 + 0.0488/1)^1 = 1.0488N(0)$ e o do segundo é $N(1) = N(0) \times (1 + 0.048/12)^{12} \approx 1,0491N(0)$. Nem sempre o que parece é. Se o juro fosse composto continuamente com taxa instantânea (líquida de IRS) de 4,8% ao ano, o capital ao fim de um ano seria $N(0)e^{0.048 \times 1} \approx 1.0492N(0)$.

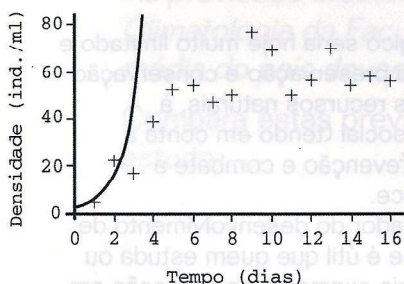


Figura 1. População de *Paramecium Caudatum*; dados das experiências de Gause (+) e ajustamento do modelo $N(t) = N(0)e^{rt}$ com $r = 1.04/\text{dia}$ e $N(0) = 2 \text{ ind./ml}$

Na Figura 1 apresentamos a evolução ao longo do tempo da densidade (por mililitro de cultura) de uma população de *Paramecium Caudatum* em meio de cultura se o modelo de crescimento fosse malthusiano e a taxa instantânea de crescimento fosse $r = 1.04/\text{dia}$, indicando ainda os valores observados nas experiências de Gause (1934).

Claramente, se o ajustamento é razoável para os primeiros dias, é óbvio que o crescimento deixou, a partir daí, de ser exponencial, possivelmente pela carência de alimento suficiente no meio de cultura para sustentar tal aumento de população. O modelo logístico considera que a taxa de crescimento *per capita*, em lugar de ser constante como no modelo malthusiano, diminui linearmente com o aumento da população atendendo à competição por alimento ou território, a qual provoca a redução da taxa de natalidade e/ou o aumento da taxa de mortalidade. Isto é, supõe-se que

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{\left(\frac{dN(t)}{dt}\right)}{N(t)} = r \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right),$$

com $K > 0$. Vamos supor que $r > 0$. Repare-se que, se a população $N(t)$ é pequena, obtém-se aproximadamente o valor r anterior, a chamada taxa intrínseca de crescimento (a taxa potencial se não houvesse limitações alimentares ou territoriais).

À medida que a população aumenta, a taxa de crescimento *per capita* diminui, tornando-se nula quando a população atinge o tamanho K . Quando tal sucede, a população não tende nem a crescer nem a decrescer, estando em equilíbrio. Para tamanhos da população maiores que K a taxa é negativa, pelo que a população diminui, aproximando-se de K . Para tamanhos da população menores que K a taxa é positiva, pelo que a população aumenta, aproximando-se de K . Este valor de equilíbrio K para o qual o tamanho da população converge é a chamada capacidade de sustento do meio.

A Figura 2 compara a taxa de crescimento *per capita* dos modelos malthusiano e logístico. A Figura 3 apresenta o ajustamento do modelo logístico aos dados de Gause referidos atrás. Para tal foi preciso resolver a equação diferencial $dN(t)/dt = rN(t)(1 - N(t)/K)$. Note-se que, pondo $Z(t) = e^{rt}K/N(t)$, vem $dZ(t)/dt = re^{rt}$, donde $Z(t) = e^{rt} + \text{constante } c$, como $Z(0) = K/N(0)$, a constante é $K/N(0) - 1$ e $Z(t) = e^{rt} + K/N(0) - 1$. Logo

$$N(t) = \frac{K}{1 + (K/N(0) - 1)e^{-rt}}$$

Claro que a realidade e o modelo (mera aproximação da realidade) não coincidem; há oscilações um tanto ou quanto aleatórias que o modelo não contempla. A natureza é um pouco mais complexa que os modelos relativamente simples que utilizámos.

Pesca

Consideremos uma população crescendo de acordo com o modelo logístico

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

com $r > 0$ e $K > 0$. Se estiver sujeita a pesca com regras fixas e uma frota de pesca com tamanho e características fixas, pesca-se tanto mais por unidade de tempo quanto mais peixe houver, isto é, a taxa de capturas será proporcional ao tamanho da população. Obtemos então o modelo

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - EN(t),$$

onde a constante de proporcionalidade $E > 0$ (esforço "líquido" de pesca) depende do tamanho e características da frota e das regras. A taxa de crescimento da população dN/dt é, como função do tamanho da população N , a diferença entre a

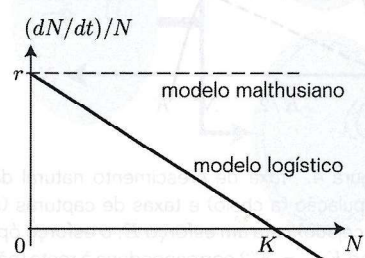


Figura 2. Comparação da taxa de crescimento *per capita* entre os modelos malthusiano e logístico.

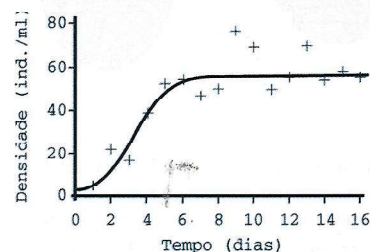


Figura 3. População de *Paramecium Caudatum*; dados das experiências de Gause (+) e ajustamento do modelo logístico com $r = 1.04/\text{dia}$, $K = 56.5 \text{ ind./ml}$ e $N(0) = 2 \text{ ind./ml}$

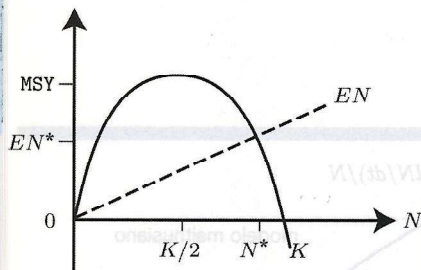


Figura 4. Taxa de crescimento natural da população (a cheio) e taxas de capturas (a tracejado) para um esforço E ; o esforço óptimo $E_{\text{opt}} = r/2$ corresponderia à recta (não desenhada) que passa pela origem e pelo pico da curva a cheio (ponto de coordenadas $(K/2, MSY)$)

taxa natural de crescimento $rN(1 - N/K)$ (a cheio na Figura 4) e a taxa de capturas EN (a tracejado na Figura 4). Se o esforço E for superior ou igual à taxa intrínseca de crescimento r , vê-se que a recta da taxa de capturas está, em $N = 0$, por cima da tangente à curva da taxa natural de crescimento, pelo que a taxa de capturas excede sempre a taxa natural de crescimento; daí resulta que a taxa de crescimento da população dN/dt é sempre negativa e a população irá decrescer até se extinguir. Admitamos pois que o esforço de pesca E é inferior a r . Temos um ponto de equilíbrio N^* , onde a taxa de crescimento natural e a taxa de capturas são iguais. É fácil ver que esse equilíbrio é estável (usamos aqui o termo no sentido mais estrito de assintoticamente estável), isto é, qualquer pequena perturbação que desvie o tamanho da população do valor de equilíbrio, é seguida de um movimento de retorno com convergência para o valor de equilíbrio. Com efeito, se a perturbação tornar a população ligeiramente maior que N^* , verificamos que a taxa de crescimento da população se torna negativa (a taxa de crescimento natural é menor que a taxa de capturas) e a população decresce até voltar a atingir o equilíbrio N^* . Se a perturbação tornar o tamanho da população menor que N^* , a taxa de crescimento da população torna-se positiva e a população irá crescer até retomar o valor de equilíbrio N^* . O leitor pode constatar que há ainda outro ponto de equilíbrio correspondente à extinção da população (tamanho da população igual a zero), mas não é estável (qualquer pequeno desvio, devido, por exemplo, à chegada de alguns imigrantes, será seguido de crescimento da população e afastamento desse equilíbrio). A estabilidade do equilíbrio é importante porque há sempre pequenas perturbações na natureza e, conseqüentemente, os únicos equilíbrios duradouros são os estáveis.

Com esta política de pesca, obtemos uma população de equilíbrio estável $N^* = K(1 - E/r)$. A taxa de capturas (por unidade de tempo) em situação de equilíbrio é então $EN^* = EK(1 - E/r)$. Como podemos tornar máxima esta taxa de capturas? Notemos que, em equilíbrio, a taxa de capturas tem de ser igual à taxa de crescimento natural, pelo que basta ver onde esta é máxima. A taxa de crescimento natural $rN(1 - N/K)$ é uma parábola e toma o seu valor máximo (conhecido por *maximum sustainable yield* ou *MSY* na literatura sobre pescas) $MSY = rK/4$ quando a população tem o tamanho $N = K/2$. Logo, o valor óptimo da taxa de capturas em equilíbrio é $MSY = rK/4$ e a correspondente população de equilíbrio é $N_{\text{opt}}^* = K/2$; como $N^* = K(1 - E/r)$, para conseguir a situação óptima, temos de escolher um esforço $E_{\text{opt}} = r/2$, isto é escolher para recta que descreve a taxa de capturas aquela que passa pelo pico da curva que descreve a taxa de crescimento natural.

Aqui estamos apenas a otimizar a quantidade pescada por unidade de tempo, isto é, a receita. Mas há também a despesa, que é, grosso modo, proporcional ao esforço E . Se quisermos otimizar o lucro em vez da receita, os resultados serão obviamente diferentes dos anteriores.

Um outro problema interessante a estudar é o da política de pesca de quota constante, em que se estabelece uma taxa fixa de capturas C por unidade de tempo. O modelo é então

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) - C.$$

Genética de populações e equilíbrio de Hardy-Weinberg

Na luta dos seres vivos pela sobrevivência e pela reprodução, certos genótipos são, pelas características físicas, fisiológicas ou comportamentais que conferem aos que os possuem, mais aptos do que outros, pelo que a sua representação na geração seguinte tenderá, em termos proporcionais, a ser maior. É este o processo de selecção natural que Darwin e Wallace utilizaram na sua teoria da evolução das espécies. Mas outros agentes evolucionários, como mutações, migrações e recombinações durante a meiose, concorrem com a selecção para alterar a composição genética das populações, isto é, a proporção dos diversos tipos de genes na população. É o estudo destas alterações que constitui o objecto da Genética de Populações, cujo grande surto ocorreu entre as duas guerras

mundiais com Ronald Fisher (também grande nome da Estatística, particularmente da Estatística Agrícola), J. B. S. Haldane e Sewall Wright. Ao contrário de Darwin e Wallace, em cuja teoria se inspiraram, eles conheciam já as leis de Mendel (durante muito tempo ignoradas mas entretanto redescobertas). Isso era suficiente para a quantificação da genética de populações, apesar de ainda não se saber o que eram os genes nem como se segregavam antes de passar aos descendentes.

Vamos considerar o caso de uma população diplóide (isto é, em que, no estado adulto, os cromossomas aparecem aos pares, salvo os cromossomas sexuais). Para simplificar, vamos considerar apenas um *locus*, isto é, uma posição num par de cromossomas não sexual e, nesse *locus*, vamos supor que há apenas dois possíveis alelos (duas variantes do gene lá localizado). Designemos esses alelos por *A* e *a*, com frequências na população *p* e $q = 1 - p$, respectivamente. Claro que $0 < p < 1$ e que *p* se obtém dividindo o número de alelos *A* existentes na população pelo número total de alelos dos dois tipos.

Começemos pelo caso mais simples de uma população muito grande, onde o acasalamento seja aleatório e onde não haja selecção, migração ou mutação. Ante a ausência de agentes de evolução, é válida a lei de Hardy-Weinberg (H-W), que diz que a composição génica não se altera ao longo das gerações.

Para o provar, repare que os indivíduos têm necessariamente um de três possíveis genótipos: *AA*, *Aa* (ou *aA*, pois a ordem dos cromossomas é irrelevante) e *aa*. Sejam P_0 , Q_0 e R_0 as respectivas frequências na população nesta geração inicial (geração zero). Claro que as frequências dos alelos *A* e *a* são, nesta geração inicial, respectivamente, $p = p_0 = P_0 + Q_0/2$ e $q = q_0 = Q_0/2 + R_0$.

Os gametas (óvulos ou espermatozoides, conforme o sexo do indivíduo) que se formam após a meiose e que só têm um dos cromossomas do par, têm todos o alelo *A* se o indivíduo tem genótipo *AA* e têm todos o alelo *a* se o indivíduo tem genótipo *aa*. Se o indivíduo tem genótipo *Aa*, cada gameta tem probabilidade 1/2 de ser *A* e probabilidade 1/2 de ser *a*, pelo que, numa população muito grande, cerca de metade dos gametas de indivíduos com genótipo *AA* serão *A* e a outra metade serão *a*.

A frequência de gametas *A* será então (com excelente aproximação)

$P_0 + Q_0/2 = p$ e a frequência de gametas *a* será $Q_0/2 + R_0 = q$ isto tanto entre a população masculina como entre a população feminina.

Supondo o acasalamento aleatório (isto é, independente dos genótipos dos indivíduos que acasalam), cada indivíduo da geração seguinte resulta da união de um gameta escolhido ao acaso de entre os produzidos pela população feminina e um outro escolhido ao acaso de entre os produzidos pela população masculina. A probabilidade de se juntarem dois gametas *A*, formando assim um indivíduo da nova geração (geração um) com genótipo *AA*, é então (dada a independência) o produto $P_1 = p \times p = p^2$. Semelhantemente, a probabilidade de se formar um indivíduo *aa* será $R_1 = q \times q = q^2$. Um indivíduo *Aa* pode formar-se de duas maneiras, quer juntando um gameta feminino *A* com um gameta masculino *a*, o que tem probabilidade de ocorrer $p \times q$, quer reciprocamente, o que tem a mesma probabilidade de ocorrer; logo, a probabilidade de se formar um indivíduo *Aa* é $Q_1 = 2pq$.

Admitindo uma população muito grande, as proporções na geração 1 dos três genótipos *AA*, *Aa* e *aa*, serão, com excelente aproximação, p^2 , $2pq$ e q^2 (o chamado equilíbrio de Hardy-Weinberg, cujos termos se podem obter do desenvolvimento do binómio $(p + q)^2$). Nesta geração 1, a frequência do alelo *A* será então

$$p_1 = P_1 + Q_1/2 = p^2 + 2pq/2 = p(p + q) = p \times 1 = p$$

e, semelhantemente, a frequência do alelo *a* será $q_1 = q$. Daqui se deduz que na geração 2 voltaremos a ter frequências dos genótipos p^2 , $2pq$, e q^2 , isto é, o equilíbrio das frequências dos genótipos atinge-se ao fim de uma geração para não mais se alterar. Quanto às frequências dos alelos, elas não sofrem alteração em relação aos valores iniciais, (embora este equilíbrio seja neutral, isto é, se alguma perturbação provocar um pequeno desvio, a frequência dos alelos manter-se-á nos novos valores).

Pôdemos, pois, por comodidade, trabalhar apenas com as frequências dos alelos

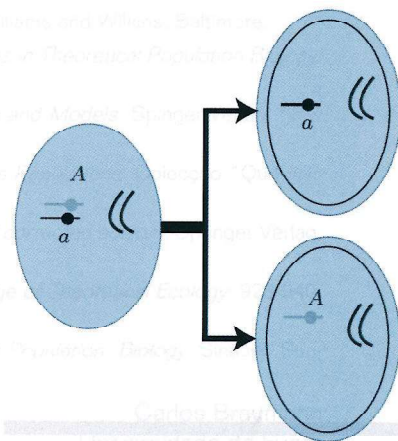


Figura 5. Comportamento de um *locus* na meiose, exemplificando com o genótipo *Aa*. À esquerda está uma célula com o seu núcleo e à direita estão gametas após meiose (de facto, cada célula dá 4 gametas)

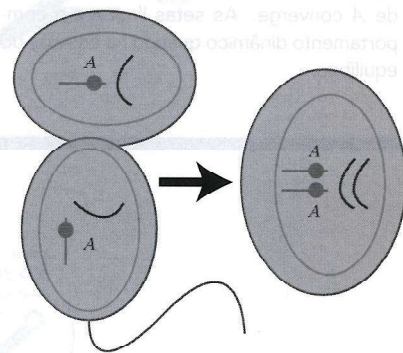


Figura 6. Comportamento de um *locus* na união de um óvulo e de um espermatozóide para formar um ovo, exemplificando com o caso de ambos os gametas serem *A*

pois, a partir delas (pelo equilíbrio de H-W), podemos obter as frequências dos genótipos, senão imediatamente, pelo menos ao fim de uma só geração. Como só há dois alelos, a frequência p do alelo A determina a do outro.

Como vimos, se não actuarem quaisquer agentes de evolução, as frequências dos alelos não se alteram ao longo das gerações, isto é, não há evolução. Vejamos agora o efeito da mutação sobre essas frequências.

Mutação

Considere o caso de haver mutação do alelo A para o alelo a com taxa de mutação $\mu > 0$ (valores típicos de μ são da ordem de 10^{-5} a 10^{-10}). Seja $p = p_0$ a frequência na geração inicial do alelo A . De uma geração para a seguinte, há uma proporção μp de alelos A que passam a ser a , isto é, na geração seguinte, as proporções dos alelos são $p_1 = p - \mu p = p(1 - \mu)$ e $q_1 = q + \mu p$. Claro que, na geração a seguir a esta, a frequência do alelo a será $p_2 = p_1(1 - \mu) = p(1 - \mu)^2$. Por indução, pode facilmente mostrar-se que, na geração n , vem $p_n = p(1 - \mu)^n$, donde, quando $n \rightarrow \infty$, vem $p_n \rightarrow 0$ (e, portanto, $q_n = 1 - p_n \rightarrow 1$). Isto é, o alelo A aproxima-se progressivamente da extinção, pelo que o resultado da evolução será, neste caso, uma população homocigótica inteiramente constituída por indivíduos com genótipo aa .

Que sucede se, além de haver mutação de A para a com taxa $\mu > 0$, houver também mutação de a para A com taxa $\nu > 0$?

Tem-se

$$p_1 = p - \mu p + \nu q = p - \mu p + \nu(1 - p) = \nu + p(1 - \mu - \nu),$$

sendo a alteração $\Delta p = p_1 - p = \nu - p(\mu + \nu)$. Qual será o valor de equilíbrio, isto é o valor de p que não se altera de uma geração para a seguinte, ou seja, o valor de p que coincide com p_1 ? Será a solução da equação às diferenças $\Delta p = 0$, isto é, $\hat{p} = \nu / (\mu + \nu)$ (usamos o "chapéu" para indicar que é o valor de equilíbrio). Este equilíbrio é estável, como vamos ver. É fácil verificar que, se a frequência do alelo A se desviar de \hat{p} , a alteração Δp na geração seguinte será negativa ou positiva conforme o desvio seja para cima ou para baixo, isto é, tenderá a "corrigir" o desvio. Isto só por si não prova a estabilidade porque a "correção" poderia ser excessiva e verificar-se uma sequência de valores de p que, em vez de convergir para \hat{p} , oscilasse em torno de \hat{p} com oscilações crescentes. Mas, da expressão de p_1 , pode mostrar-se por indução que

$$p_n = \frac{\nu}{\mu + \nu} (1 - (\mu + \nu)^n) + p(1 - \mu - \nu)^n$$

(é interessante "intuir" a expressão por iteração e aplicação da fórmula da soma de termos de uma progressão geométrica e, depois, demonstrá-la rigorosamente pelo método de indução). Logo, como podemos supor $\mu + \nu < 1$, $p_n \rightarrow \nu / (\mu + \nu) = \hat{p}$. Ao contrário do caso anterior de mutação num só sentido, o equilíbrio estável que será atingido é polimórfico, isto é, coexistem na população os dois alelos A e a e os três genótipos AA , Aa e aa .

Conclusão

Apresentámos, em forma de esboço (dadas as limitações de espaço) alguns exemplos muito simples de aplicação útil de modelos matemáticos no estudo de crescimento de populações, em pescas e em genética de populações. Do ponto de vista didáctico, esses exemplos permitem ilustrar (naturalmente com um cuidado e um desenvolvimento que não foram possíveis aqui) a construção de modelos matemáticos aplicados à descrição e análise de fenómenos naturais, bem como exercitar a utilização de conceitos e propriedades matemáticos (conceito de derivada e seu significado, regras de derivação, soma de termos de progressão geométrica, limites, ideias elementares de probabilidade, etc.). O uso de notações variadas na sala de aula, como " $N(t)$ " em lugar de usar sempre o tradicional " $f(x)$ ", evita estereótipos e desenvolve a maleabilidade mental para aplicar as mesmas ideias e automatismos adquiridos em situações aparentemente diferentes. Deixaremos para outra oportunidade o interessantíssimo estudo do efeito da selecção natural (ou artificial) em que a regra da sobrevivência dos genótipos mais

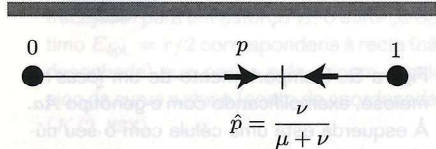
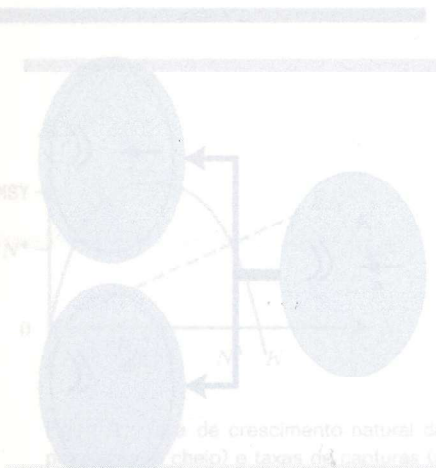


Figura 7. Mutação de A para a com taxa μ e de a para A com taxa ν . Há um ponto de equilíbrio estável \hat{p} para o qual a frequência de A converge. As setas ilustram o comportamento dinâmico quando há desvios do equilíbrio

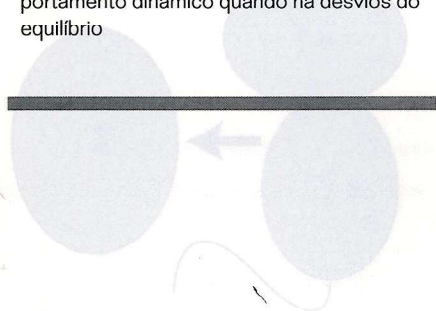


Figura 8. Comportamento de um locus na unidade de um óvulo e de um espermatozoide para formar um ovo exemplificando como o caso de ambos os gametas serem A .

aptos, afinal, admite excepções, uma delas surpreendente. Enquanto o comportamento qualitativo no caso da mutação era intuitivamente previsível, servindo o modelo matemático para o corroborar, a *excepção surpreendente* da selecção dificilmente se revelaria sem ser através do modelo matemático. Deixaremos também para outra oportunidade o efeito sobre as populações da "lotaria" dos nascimentos e mortes, onde o efeito do acaso, que está sempre presente, pode ser ignorado em populações grandes (que pouco são afectadas) mas pode ser considerável em populações pequenas. Essa aleatoriedade poderá ter sido um poderoso agente de evolução das espécies, cujo efeito pode ser estudado matematicamente.

Os processos de selecção natural, mutação e recombinação têm permitido a evolução de características genéticas favoráveis à adaptação de populações ao seu meio, podendo considerar-se um mecanismo de optimização num número elevado de dimensões (dada a enorme quantidade de genes envolvidos). Alguém pensou: porque não simular em computador um processo semelhante para tentar resolver problemas de optimização envolvendo um elevado número de dimensões que se colocam em diversas aplicações da Matemática e para os quais os algoritmos de optimização tradicionais são ineficazes? De facto, casos há em que os algoritmos tradicionais levariam milhões de anos nos melhores computadores, quando a evolução levou o mesmo tempo mas usando o mecanismo incomparavelmente mais lento da transferência de genes de uma geração para a seguinte, o qual pode ser imitado na simulação em computador, com a diferença de num só segundo simularmos muitas gerações. Surgiram os chamados algoritmos genéticos, que têm hoje inúmeras aplicações. Há, porém, que saber *traduzir* o problema matemático para um problema genético equivalente. Se a Matemática foi extremamente importante para o desenvolvimento da Genética de Populações, os algoritmos genéticos mostram que também o recíproco é hoje verdadeiro. É um bom exemplo das virtudes da interdisciplinaridade. Gostaríamos também de, numa outra oportunidade, apresentar alguns

modelos matemáticos de interacção de populações (relações presa-predador, espécies em competição, etc.) ou de epidemias, em que há resultados curiosos muito importantes. Um deles, para certo tipo de epidemias, basta vacinar uma parte da população susceptível para que seja afastado o risco de epidemia.

Por ora, ficamos por aqui.

Referências

- Hoppensteadt, F. (1995). Getting started in Mathematical Biology, *Notices of the American Mathematical Society*, 42 (9): 969-975.
- Cause, G. F. (1934). *The Struggle for Existence*. Williams and Wilkins, Baltimore.
- Ginzburg, L. R. e Golenberg, E. M. (1985). *Lectures in Theoretical Population Biology*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Hastings, A. (1997). *Population Biology, Concepts and Models*. Springer-Verlag, New York.
- Hillion, H. (1986). *Les Théories Mathématiques des Populations*. Colecção "Que sais je?", Presses Universitaires de France, Paris.
- Murray, J. D. (1993). *Mathematical Biology (second corrected edition)*. Springer Verlag, Berlin.
- Scudo, F. M. e Ziegler, J. R. (1978). *The Golden Age of Theoretical Ecology*: 923-940. Springer-Verlag, Berlin.
- Wilson, E. O. e Bossert, W. H. (1971). *A Primer of Population Biology*. Sinauer, Sunderland.

Carlos Braumann
Universidade de Évora

in natura — suplemento especial: Pùblico, 15 Abril 2001

