A Matemática e a Natureza
A Forma e o Ritmo

Mercês Ramos
Sousa Ramos


Figura 1. *Stonehenge*

Os ritmos da natureza só começam a ser estudados, descritos e explicados quando à observação rigorosa se alia o rigor da descrição matemática, da medida e da experimentação.

Em resumo

Na *Matemática* o homem busca a forma, a ideia e joga com ela; no estudo da *Natureza* o homem sente o seu ritmo e procura apropriar-se da sua música, da sua dinâmica, do seu caos.

Assim, vemos surgir a Geometria com os Gregos e a Dinâmica com Galileu e Newton. A busca da forma perfeita, do movimento regular e estável tornam-se o paradigma da Ciência.

Os conjuntos de Cantor (fractal) e os pontos homoclínicos (caos) de Poincaré, no final do século XIX levam à mudança de paradigma. Durante todo o século XX prepara-se essa mudança, mas só no final do século a Geometria Fractal e a Teoria do Caos se impõem como áreas científicas; será preciso percorrer o novo século para que a busca da forma fractal e do comportamento caótico se tornem dominantes na actividade científica.

Quanto à síntese entre a forma e o ritmo, entre o fractal e o caos, entre a Matemática e a Natureza só se tornará possível pela força das tecnologias. Assim, o caminho tecnológico na direcção do digital, do DNA e da dominação da informática leva-nos a perceber a Matemática e a Natureza através do computador, processamentos ultra-rápidos de sucessões de 0 e 1 ou de A, C, G e T que modelam a realidade em fluxos de palavras binárias ou de 4 letras e impõem-nos uma Matemática e Natureza discreta e finita.

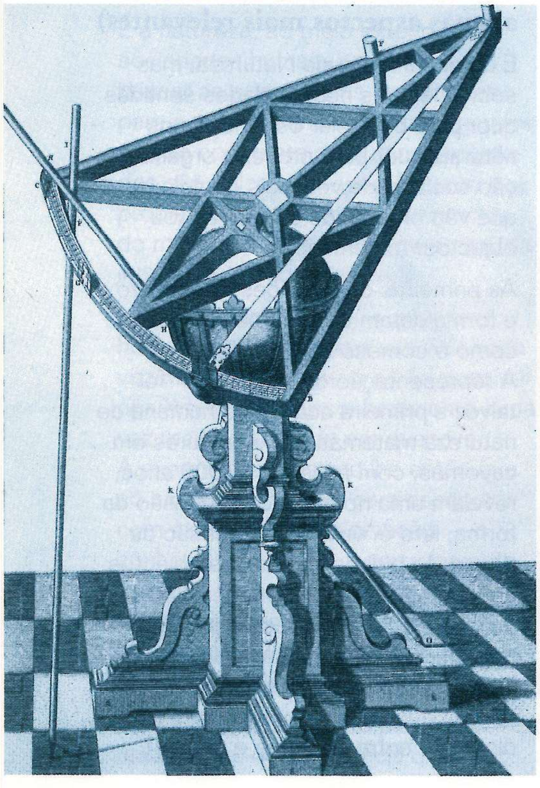
Em mais detalhe (mas realçando apenas aspectos mais relevantes)

É da observação da Natureza, mas sobretudo das necessidades sentidas quer para controlar os fenómenos naturais quer para prover à organização social cada vez mais complexa, que vão emergindo as formas (ou objectos) matemáticos.

As primeiras concepções de número e forma datam de tempos remotos como o começo do Paleolítico.
A representação de "objectos" foi talvez a primeira actividade humana de natureza matemática. As pinturas em cavernas, com mais de 15 000 anos, revelam uma notável compreensão da forma, isto é, uma compreensão da descrição bidimensional dos objectos no espaço. A ideia de número, uma das ideias mais abstractas produzidas pelo pensamento humano, foi elaborado lentamente, tendo tido uma origem qualitativa (começa com a distinção entre um, dois e muitos).

Figura 2. Pitágoras

Figura 3. Sextante utilizado por Tycho Brahe



Enquanto a ideia de número evolui tornando-se uma quantidade, desenvolve-se também a simbologia, permitindo a representação e operações entre os números. Quando passou de nómada para agricultor, o Homem, teve necessidade de dividir terrenos e construir casas. É sobretudo nas comunidades neolíticas, que se fixam ao longo dos grandes rios da África e Ásia, nas regiões tropicais ou próximo delas que as ideias matemáticas mais se desenvolvem. As terras situadas ao longo desses rios produziam colheitas abundantes desde que as cheias fossem devidamente controladas e os pântanos drenados. No decurso dos séculos estes problemas foram sendo resolvidos pela construção de diques, canais e represas. A irrigação exigiu a coordenação de actividades entre localidades muito distantes. A medida do tempo passou a ter enorme importância e os ritmos do movimento do Sol e da Lua, associados às estações do ano forneciam o fundamento para essa medida; para a construção de calendários e para fazer previsões permitindo-lhe proceder às sementeiras de modo mais seguro. A melhoria da agricultura conduziu a uma produção excedentária, melhorando os padrões de vida das populações e ao aparecimento de uma aristocracia urbana. A administração das obras era feita por um grupo conhecedor do ciclo das estações do ano, do movimento dos astros, da arte de dividir os campos, do armazenamento de alimentos e do estabelecimento de impostos. A ênfase inicial é dada, naturalmente, à aritmética prática e à medição. Porém, os detentores do conhecimento, adquirido durante séculos, não têm como tarefa apenas aplicar mas também ensinar os seus segredos. Isso leva ao desenvolvimento da tendência para a abstracção: gradualmente a aritmética transforma-se em álgebra, não só porque possibilita melhores cálculos práticos mas também como resultado do conhecimento cultivado e desenvolvido nas escolas dos escribas; a medição dá origem ao começo (apenas começo) da geometria teórica. A matemática mesopotâmica atinge um desenvolvimento relativamente elevado. Os textos mais antigos (3º milénio) revelam uma grande capacidade para calcular, contém tábuas de multiplicação e o sistema sexagesimal sobrepõe-se ao sistema decimal. Mas a característica mais relevante é a de que, no sistema de numeração, o mesmo símbolo indica o seu valor pela posição, tal como no actual, e parece ter resultado de problemas da administração, nomeadamente os relacionados com a distribuição de gado e sementes e com as operações aritméticas resultantes dessas transacções. Ulteriormente apareceu um símbolo para representar o zero. A divisão actual da hora em 60 minutos e 3600 segundos e do círculo em 360 graus, cada grau em 60 minutos e cada minuto em 60 segundos é herança dos sumérios. Os textos datados de 1750 a.C. mostram que já havia a técnica para manipular as equações quadráticas e lineares com duas variáveis e mesmo problemas que envolviam equações cúbicas e biquadráticas. Tal como no Egipto a geometria proveio da fundamentação de problemas práticos relacionados com a medição. Na geometria babilónica existem fórmulas para áreas de figuras simples e para volumes de sólidos simples e é conhecido com toda a generalidade a relação numérica entre lados de triângulos rectângulos (teorema de Pitágoras). Contudo, a característica principal desta geometria, como a de outras civilizações, é o seu suporte algébrico. Os textos deste último período estão fortemente influenciados pela astronomia, a qual atinge um considerável desenvolvimento. A matemática tornou-se mais perfeita na sua técnica de cálculo e procurou resolver problemas por meio de equações que requeriam uma certa habilidade numérica. As operações numéricas complicadas já não estão directamente relacionadas com problemas dos impostos ou de medições mas com problemas de astronomia ou com o puro prazer do cálculo.

Apesar das diferenças entre as matemáticas egípcia, mesopotâmica, chinesa e indiana, na generalidade a sua natureza aritmético — algébrica é idêntica, não parecendo ter-se emancipado da influência milenar dos problemas técnicos e administrativos, para os quais fora inventada e não se encontram tentativas daquilo que denominamos por demonstração. Quer a matemática, quer a astronomia constituem-se como "ciências" muito ligadas a fins utilitários.

É na Grécia antiga que o conhecimento científico sofreu um outro impulso: procurou-se uma compreensão racional do mundo natural. Os primeiros estudos de matemática na Grécia tinham como objectivo principal compreender o lugar do homem no universo utilizando um esquema racional. O conhecimento da natureza é uma parte do conhecimento geral e consoante a escola assim um aspecto ou outro da filosofia da natureza é realçado. A matemática ajudava a ordenar as ideias de forma lógica, a encontrar princípios fundamentais. É claro que ela não surge do nada, é herdeira das antigas civilizações orientais devido ao contacto entre os povos que habitaram a Grécia e essas civilizações; Tales de Mileto, considerado o pai da matemática grega, é um mercador. É na Grécia que surge pela primeira vez um grupo de homens (os sofistas) que abordam problemas de natureza matemática como parte de uma investigação filosófica do mundo natural e desenvolvem uma matemática que visa a compreensão e não a utilidade. Além dos sofistas que davam ênfase à realidade da mudança (em especial os atomistas como Leucipo e Demócrito), havia a escola pitagórica fundada pelo mítico Pitágoras. Esta escola procura os elementos imutáveis na natureza e na sociedade. Ao procurarem as leis eternas do universo estudam a geometria, a aritmética, a astronomia e a música. Obtém alguns resultados interessantes como os números "triangulares" (representam uma ligação entre a geometria e a aritmética). É de salientar que, o conhecimento do teorema de Pitágoras na Babilónia, resulta de medições, enquanto na Grécia foi concebido como um teorema geométrico abstracto; a demonstração geral, provavelmente, foi feita por Pitágoras. O resultado mais importante que lhe é atribuído é o dos números irracionais. Ao estudar a razão entre a diagonal e o lado do quadrado, descobriu que não podia ser dada por números inteiros ou fraccionários — incomensurabilidade de segmentos de recta. Os *Elementos* de Euclides (~300 a.C.) demonstram a existência de um sistema ordenado da geometria no plano.

Embora com os gregos a matemática se desligue totalmente dos aspectos utilitários e da medição, a observação, além da reflexão, continua a interessá-los levando-os a interrogar-se sobre o universo em que vivem. Certamente foram as observações aliadas à reflexão que conduziram Pitágoras a considerar a Terra esférica, contrariamente a concepções anteriores em que esta era vista como plana. Com base em observações cuidadosas e nos conhecimentos de geometria disponíveis Eratóstenes (275–193 a.C.) calcula o perímetro da Terra e Hiparco (séc. II a.C.) durante um eclipse solar — total em Helesponto e 80% em Alexandria, conhecendo as latitudes das duas cidades, por considerações geométricas determinou a distância da Terra à Lua e, posteriormente, a distância da Lua ao Sol.

Assim, os primeiros desenvolvimentos matemáticos são relativos à forma. A representação do ritmo mais evidente na Natureza, o definido pelo movimento dos astros fez desenvolver a geometria plana e esférica e principalmente a trigonometria que, de início, não se distingue da astronomia (essa distinção é feita primeiro por Nasir, 1201–74, e posteriormente por Regiomontano em 1464). Contudo, mesmo as descrições dos ritmos são enquadradas na das formas: a descrição do movimento aparente dos astros é associada ao círculo e a composições de círculos; a dos movimentos dos corpos terrestres, incluída na Mecânica, as primeiras de que

Figura 4. *Mysterium Cosmographicum* de Kepler

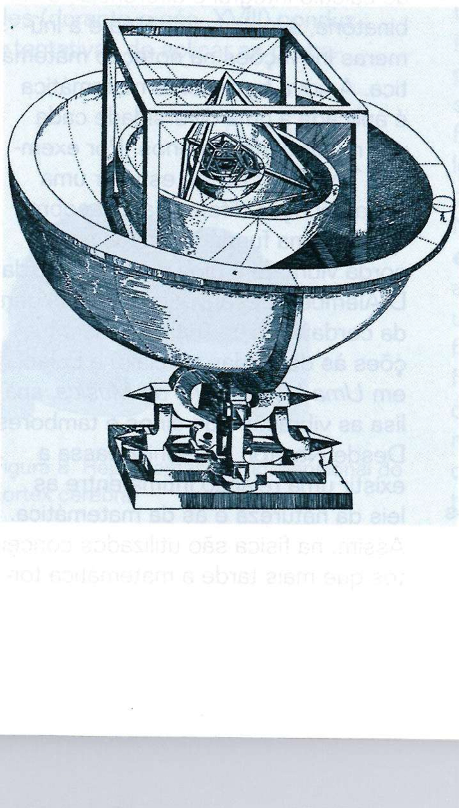
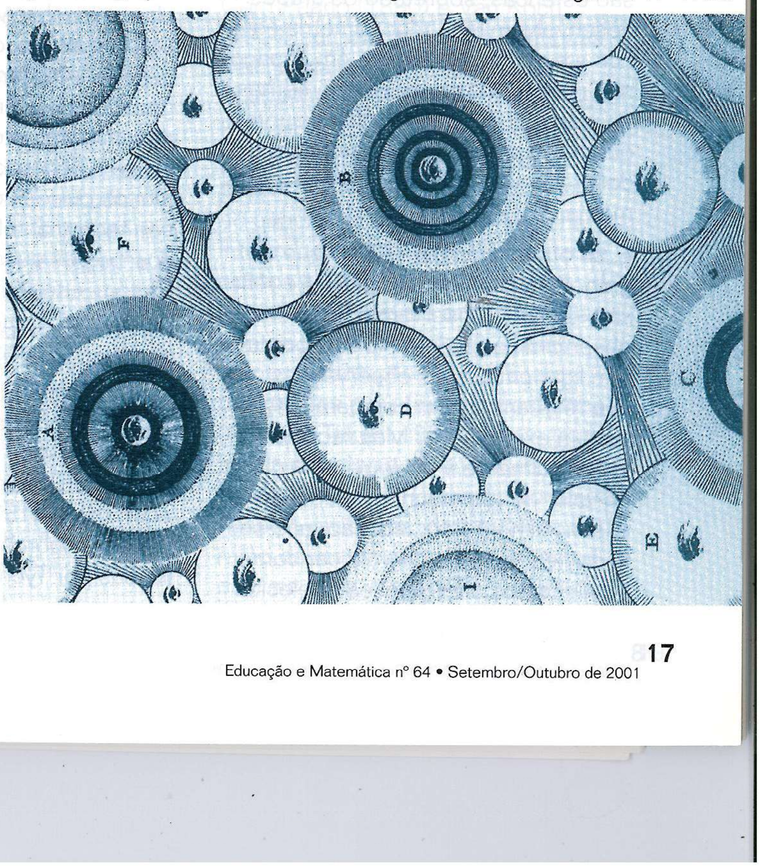


Figura 5. Agrupamentos de estrelas segundo Thomas Wright (1711–1786)



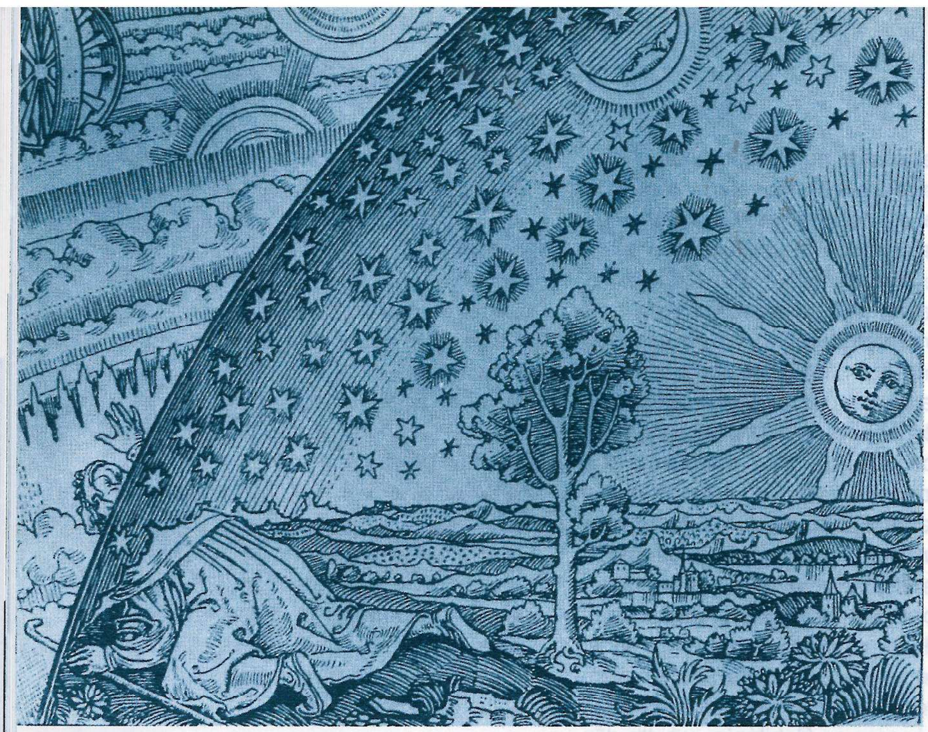


Figura 6. *Homem olhando o infinito* (Camille Flammarion, séc. XIX)

há registos, ligam-se ao estudo das condições de equilíbrio da alavanca — quando a alavanca roda, a "velocidade do peso" é proporcional ao comprimento do braço que o suporta e as potências opostas cancelam-se; a alavanca é associada a uma das propriedades mágicas do círculo e muitos dos movimentos na mecânica são relacionados com propriedades da alavanca.

Apesar de todo o desenvolvimento da geometria grega, é uma geometria no plano. Mas a Terra e a esfera celeste são esféricas, sobretudo os árabes desenvolvem uma trigonometria esférica e surgem geometrias em espaços não planos. Mas quer as geometrias no plano, quer em superfícies curvas quer em espaços superiores a dois descrevem formas regulares, é a geometria do regular.

E, as outras ciências? Claro que os gregos dados à contemplação e reflexão, também observam a Natureza, observam-na mesmo muito e procuram ligar entre si as observações que realizam, fazem comparações e tentam explicações. Mas recorrem essencialmente à analogia, acreditam no valor do testemunho, procedem essencialmente por indução, não sentindo necessidade de verificar com novos factos a lei geral estabelecida.

Na Física de Aristóteles, expoente da física grega, há essencialmente descrição, julgamento, avaliação vaga deste ou daquele aspecto mas não há medição — os gregos observam mas não experimentam. A matemática tão elegantemente desenvolvida não é ligada directamente às observações do mundo natural, além da astronomia. Arquimedes deve ter sido a excepção ao interessar-se quer pela matemática quer por aplicações práticas de mecânica. Um dos contributos mais importantes está relacionado com teoremas sobre áreas de figuras planas e sobre volumes de corpos sólidos, situando-se num campo que hoje denominamos por cálculo integral, de importância fundamental em desenvolvimentos posteriores da Física e Engenharia. Para além de muitos outros contributos citamos o seu teorema sobre o peso aparente dos corpos quando mergulhados num líquido — teorema de Arquimedes.

Os ritmos da natureza só começam a ser estudados, descritos e explicados quando à observação rigorosa se alia o rigor da descrição matemática, da medida e da experimentação. Esse impulso emerge na astronomia com Kepler (1571–1630) baseado nos registos rigorosos de medições realizadas por Tycho Brahe e por ele próprio, enuncia as três leis para o movimento dos planetas. No entanto, é Galileu (1564–1642) quem perspectiva a relação intrínseca entre a física e a matemática: a matemática passa a ser a expressão simbolizada da realidade que a física pretende descrever. Poder-se-á perguntar, foi Galileu o principal iniciador da medida? Vimos que, no início das civilizações, a medida deu origem à geometria e contribuiu para o conceito de número; nunca deixou de ser utilizada para fins práticos e do séc. XIII a XVI é utilizada na actividade técnica na construção de inúmeros engenhos. O que Galileu fez foi recolocar a importância da medida das grandezas para encontrar relações entre elas através da matemática. Apesar da perspectiva revolucionária de Galileu ao delinear as características do que hoje denominamos "ciência", a formulação matemática da sua física é pobre, não dispunha da "ferramenta" adequada. Essa ferramenta (método das fluxões) é inventada por Newton (1642–1727) ao procurar descrever os ritmos observados na Natureza, constituindo hoje o cálculo diferencial e integral. Ao fazê-lo não só impulsiona a física de um modo nunca antes conseguido como fez nascer um novo ramo da matemática, a análise matemática. Do mesmo modo, Leibniz (1646-1716) ao procurar comprender a unidade essencial do universo, busca um método geral através de uma linguagem universal para a mudança e o movimento, sendo levado a criações matemáticas: ao cálculo integral e diferencial, à combinatória, à lógica simbólica e a inúmeras inovações na notação matemática. A nova ferramenta matemática é aplicada a uma diversidade cada vez maior de fenómenos, Por exemplo, Taylor (1713) ao estudar uma dada equação diferencial descobre que a forma fundamental de uma corda vibrante é uma curva sinusoidal, D'Alembert desenvolve a análise geral da corda vibrante (introduz as equações às derivadas parciais) e Euler, em *Uma Nova Teoria da Música*, analisa as vibrações de sinos e tambores. Desde Newton e Leibnitz passa a existir uma relação íntima entre as leis da natureza e as da matemática. Assim, na física são utilizados conceitos que mais tarde a matemática tornará precisos, é o caso dos conceitos velocidade, força aceleração, ..., os quais contém implícito, o conceito de vector, no entanto, o cálculo vectorial só se desenvolverá na segunda metade do séc. XIX. É de notar que muitos cientistas (entre outros, Poisson, Fourier e Cauchy) são conduzidos a produções poderosas na matemática movidos pelo seu interesse profundo por questões da mecânica e da física. Por outro lado, há desenvolvimentos autónomos da matemática para os quais não era previsível a sua aplicação na física ou noutras ciências. Estão nesse caso a teoria dos grupos, as geometrias não euclideanas, a teoria das probabilidades e a teoria dos conjuntos.

A relatividade de Einstein veio mostrar que o desenvolvimento das geometrias não euclideanas tinham sentido no mundo físico. A teoria dos grupos desenvolvida por Galois, Lie e Klein, e a análise em variedades por Weyl e Cartan desempenham um papel importante na descrição geométrica da física quântica.

A teoria das probabilidades surgiu devido a questões de seguros e desenvolveu-se para os jogos de azar (Fermat e Pascal séc. XVII). O desenvolvimento da teoria das probabilidades (durante o séc. XVIII) conduz a tentativas de aplicar as probabilidades ao pensamento humano, nomeadamente a probabilidade de um tribunal chegar a veredictos verdadeiros (séc. XIX). Mas a teoria das probabilidades, sobretudo o seu ramo mais prático, a estatística, foi aplicada, com bastante extensão, em diversas ciências. Nas ciências sociais (recém emergentes) foi aplicada a noção de *distribuição normal* a inúmeras situações, desde as medidas do corpo humano, ao crime, casamento, suicídios e Quetelet em *Mecânica Social* (um ensaio sobre física social, 1835) introduz o conceito de homem médio; em Biologia, Galton (1822-1911), aplica a curva de distribuição dos erros quételet-gaussiana, especialmente na genética, onde recolhe numerosos dados e introduz os conceitos de correlação e de regressão, mas também na psicologia devido à ideia de que tudo é quantificável — deu origem à criação do primeiro laboratório de psicologia experimental em Leipzig (1879). Pearson, desenvolve os fundamentos matemáticos para a estatística do séc. XX especialmente a aplicada a questões biológicas. É curioso que os físicos considerem os sucessos dos processos probabilísticos nas ciências sociais para a aplicação a processos físicos, emergindo por vezes uma analogia vaga entre indivíduos de uma população e moléculas de um gás. Na mão de físicos como Boltzmann e Maxwell, a estatística desabrocha e a teoria cinética dos gases assume um papel importante na evolução da física, conduzindo ao aparecimento da física estatística a qual se aplica em domínios como: a termodinâmica, a mecânica quântica, a astronomia e outros. Markov, na continuação dos trabalhos desenvolvidos pela escola russa, para o estudo de funções com variáveis aleatórias introduz o que hoje denominamos "cadeias de Markov" (de 1886 a 1922) que se aplicam à física estatística, à genética e à economia.

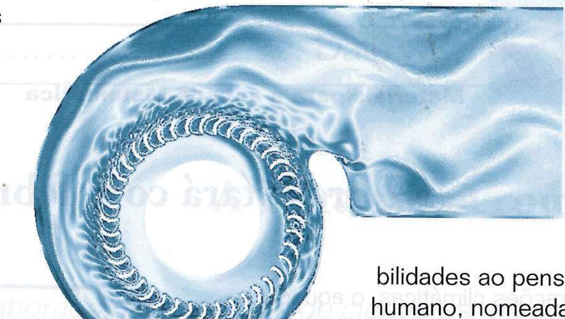


Figura 7. Representação computacional da dinâmica de um gás

Figura 8. Representação tridimensional do cortéx cerebral

Assim, no final do séc. XIX e durante o séc. XX há duas modelações matemáticas possíveis para os fenómenos observáveis (directa ou indirectamente). Um, o mais antigo resultava da aplicação das equações diferenciais. Teoricamente permitia a determinação com rigor da evolução de qualquer sistema, em particular do universo, na prática só aplicável a problemas relativamente simples. O outro, mais recente, resultava da análise estatística de quantidades médias características dos sistemas de um grande número de constituintes, por isso traduzia uma representação grosseira da evolução dos sistemas complexos — eram as leis dos grandes números.

Não só a ciência, também a indústria, em franco progresso a partir do séc. XVIII, se alia irreversível e reciprocamente à matemática — as técnicas vão dando lugar às tecnologias.

Mas, tal como as formas, todos os ritmos da natureza estudados (e os dos artefactos criados pelo homem a partir das leis da natureza) são do tipo regular (periódico) ou possível de tal ser considerado como aproximação. A mudança começa a preparar-se com Cantor (1883) ao introduzir conjuntos com a cardinalidade do contínuo, mas totalmente desconexos. São estes conjuntos que permitem, pela primeira vez descrever formas não regulares. Com Peano (1890) e Van Koch (1904) surgem as curvas contínuas designadas por fractais depois de Mandelbrot (1955). Em simultâneo, Poincaré (1882), tentando resolver um problema antigo (é o sistema solar estável?), mostra que é irresolúvel no quadro do cálculo diferencial e integral, devido ao aparecimento de pontos homoclínicos (intersecção das variedades estáveis e instáveis de pontos selas) levando ao aparecimento de soluções — mais tarde designadas por atractores estranhos (Ruelle e Taken, 1971) — que traduzem a existência de comportamento caótico. Embora Poincaré não resolvesse o problema, desenvolveu um ramo da matemática a que chamou *analisis situs*, mais tarde denominada topologia, e introduziu técnicas novas no estudo da dinâmica — dinâmica topológica, permitindo o estudo dos sistemas dinâmicos complexos. A associação destas técnicas à codificação simbólica conduz à dinâmica simbólica começando a tornar possível o estudo de sistemas de que à partida não se conhecem as equações diferenciais como é o caso de sistemas meteorológicos, biológicos, económicos, psicológicos, sociológicos ou outros. É de salientar que durante o séc. XX houve mais publicações de matemática e desenvolveram-se mais áreas do que em toda a história anterior. É oportuno interrogarmo-nos se essa produção imensa se traduziu numa maior eficácia no conhecimento e compreensão da Natureza? Apesar da quantidade de conhecimento produzido acerca do universo em que vive, o homem actual só compreende e descreve uma pequena parte dos fenómenos que nela se produzem, os regulares. E, do mesmo modo que na antiguidade o homem procurou compreender a regularidade dos fenómenos naturais, também agora está perante o enorme desafio de compreender em profundidade e dominar fenómenos como: o clima, a codificação do DNA, os mercados, as interacções sociais, a aprendizagem, o processamento da informação no cérebro,..., Isto é, fenómenos cuja forma ou ritmo já não são mais da classe do regular.

É nossa opinião que, no séc. XXI, os fractais e caos definirão o paradigma dominante da actividade do matemático no seu desejo de compreender as formas e os ritmos da Natureza.

Mercês Ramos
ESE de Lisboa

Sousa Ramos
Instituto Superior Técnico

Materiais para a aula de Matemática

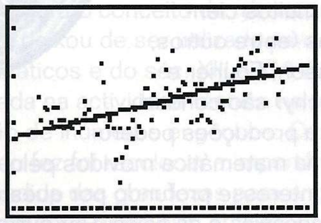
A Terra estará com febre?

As alterações climáticas, o aquecimento global, a subida do nível do mar, ... são temas tão actuais e importantes, que mobilizam os jovens, e que por outro lado lhes permitem apreciar a ligação da Matemática à realidade e perceber a sua importância no mundo actual.

Esta tarefa foi pensada de modo que a primeira página se destine a alunos do 2º ou 3º ciclos enquanto a actividade na totalidade (1ª e 2ª páginas) se dirige a alunos do ensino secundário.

De facto os dados das temperaturas médias em Lisboa não apresentam uma tendência muito diferente do que se passa com as temperaturas globais:

Esta actividade tanto pode ser uma simples tarefa para a sala de aula como um ponto de partida para um projecto mais prolongado ou até para a Área de Projecto.



Há alguns locais na Internet onde é possível encontrar dados relativos ao clima, destacamos o do Instituto de Meteorologia de Portugal — http://www.meteo.pt, um local na Nasa de onde tirámos os dados usados e onde é possível encontrar muitos outros — http://www.giss.nasa.gov/data/update/csci/world_and_us_maps/index.html e um local que permite a quem estiver interessado, participar num projecto colectivo de estudo do clima, em casa, a partir do seu computador pessoal — http://www.climate-dynamics.rl.ac.uk/.

Adelina Precatado

Não existe nenhum ramo da matemática, por mais abstracto que seja, que não possa algum dia ser aplicado a fenómenos do mundo real

Nikolay Lobachevsky