Michael D. de Villiers é professor associado de educação matemática na Universidade de Durban-Westville, na África do Sul. Os temas principais do seu trabalho são a geometria, modelação e aplicações, e história e filosofia da matemática. Tem escrito numerosos livros e artigos, em particular sobre geometria dinâmica. Do seu último livro, "Rethinking Proof with The Geometer's Sketchpad", editado em 1999 pela Key Curriculum Press, extraímos para este número o texto intitulado "The Role and Function of Proof with Sketchpad". Trata-se de uma apresentação clara da importância e do carácter indispensável da demonstração no conhecimento matemático, e das várias funções que assume, nomeadamente em presença de programas de geometria dinâmica como o Sketchpad.

Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad*

Michael D. de Villiers

A dificuldade que os alunos têm em compreender a necessidade da demonstração é bem conhecido dos professores do ensino secundário e é identificada em toda a investigação em educação, sem excepção, como um dos maiores problemas no ensino da demonstração. Quem não experimentou já uma sensação de frustração quando confrontado com a pergunta "Porque é que temos que demonstrar isto?". A seguinte conclusão de Gonobolin (1954, p. 61) exemplifica o problema:

> ...os alunos... não... reconhecem a necessidade de demonstração lógica dos teoremas da geometria, especialmente quando estas demonstrações têm visualmente um carácter óbvio ou podem ser feitas empiricamente.

De acordo com Afanasjewa (Freudenthal, 1958, p. 29) o problema dos alunos com a demonstração não deve ser apenas atribuído a um desenvolvimento cognitivo lento (por exemplo, a uma falta de competência no raciocínio lógico) mas também a que os alunos não compreendem a função (significado, objectivo e utilidade) da demonstração. De facto, alguns estudos recentes, que contradizem Piaget, mostram que crianças muito novas são inteiramente capazes de fazer raciocínios lógicos em situações reais e com significado para elas (Wason e Johnson-Laird, 1972; Wallington, 1974; Hewson, 1977; Donaldson, 1979). Além disso, tentativas de investigadores para ensinar lógica a alunos não conduziram com frequência a diferenças estatisticamente significativas no que diz respeito à capacidade de demonstrar ou à atitude perante a demonstração (Deer, 1974; Walter, 1972; Mueller, 1975). Mais do que tudo o resto, parece que o principal problema em jogo é a motivação que as várias funções da demonstração assumem para os alunos.

A questão que se coloca é, contudo, "Que funções tem a demonstração na própria matemática que podem ser utilizadas na sala de aula para tornar a demonstração mais significativa para os alunos?". O objectivo deste texto é descrever algumas funções importantes da demonstração e discutir brevemente algumas implicações para o ensino da demonstração.

As funções da demonstração em matemática

Tradicionalmente, a função da demonstração foi vista exclusivamente como dizendo respeito à verificação da correcção das afirmações matemáticas. A ideia é que a demonstração é usada principalmente para remover a dúvida pessoal ou a de cépticos, uma ideia que dominou unilateralmente a prática de ensino e a maior parte das discussões ou da investigação relativa ao ensino da demonstração. Por exemplo, de acordo com Kline (1944, p. 318):

> Uma demonstração apenas tem significado quando responde às **dúvidas** dos alunos, quando prova o que não é óbvio. (*bold* acrescentado) Kline (1973, p.151)

> A necessidade, a funcionalidade, da demonstração pode apenas emergir em situações em que os alunos têm **incertezas** quanto à verdade das proposições matemáticas. (*bold* acrescentado) Alibert (1988, p. 31)

Hanna (1989) e Volmink (1990) também parecem definir demonstração em termos da sua função de verificação, tendo em conta o seguinte:

> Uma demonstração é um argumento necessário para **validar** uma afirmação, um argumento que pode assumir várias formas diferentes desde que seja convincente. (*bold* acrescentado) Hanna (1989, p. 20).

> Porque é que nos preocupamos em demonstrar teoremas? Defendo aqui que a resposta é: para que possamos **convencer** pessoas (incluindo nós próprios) ... podemos encarar **a demonstração como um argumento suficiente para convencer um céptico razoável**. (*bold* acrescentado) Volmink (1990:p. 8, p. 10).

Embora muitos autores (por exemplo, Van Dormolen (1977), Van Hiele (1973) e Freudenthal (1973) e outros) tenham argumentado que a necessidade do rigor dedutivo pode sofrer mudanças e tornar-se mais sofisticada com a passagem do tempo, isto também é defendido a partir do ponto de vista que a função principal da demonstração é a de verificação. Por exemplo:

> ... para haver progresso no rigor, o primeiro passo é **duvidar** do rigor em que se acredita naquele momento. Sem esta **dúvida** nada haveria que levasse outras pessoas a prescrever para si próprias novos critérios de rigor. (*bold* acrescentado) Freudenthal (1973, p.151).

Muitos autores têm também proposto estados específicos no desenvolvimento do rigor. Por exemplo, Tall (1989, p. 30) propõe três estados na construção de um argumento convincente, nomeadamente o convencer-se a si próprio, o convencer um amigo e o convencer um inimigo. Embora sejam distinções extremamente úteis, apenas consideram a função de verificação da demonstração.

Contudo, como foi sublinhado por Bell (1976, p. 24), este ponto de vista da verificação/convencimento como a principal função da demonstração "passa ao lado da consideração da natureza real da demonstração", pois a convicção em matemática é muitas vezes "inteiramente obtida por meios que não consistem em seguir uma demonstração lógica". Portanto a prática real da investigação moderna em matemática requere uma análise mais completa das diversas funções e papéis da demonstração. Embora eu não o defenda nem como completo nem como único, ao longo da minha investigação nos últimos anos tenho considerado útil o seguinte modelo relativo à função da demonstração. É uma ampliação ligeira da distinção original de Bell (1976) entre as funções de verificação, iluminação e sistematização. O modelo é apresentado em seguida (sem que a ordem signifique ordem de importância) e discutido mais à frente:

- *verificação* (dizendo respeito à verdade da afirmação)
- *explicação* (fornecendo explicações quanto ao facto de ser verdadeira)
- *sistematização* (a organização dos vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas)
- *descoberta* (descoberta ou invenção de novos resultados)
- *comunicação* (a transmissão do conhecimento matemático)
- desafio intelectual (a *realização pessoal/gratificação* resultantes da construção de uma demonstração).

A demonstração como processo de verificação/convencimento

Com raras excepções, os professores de Matemática parecem acreditar que apenas a demonstração fornece a certeza para o matemático e que é a única autoridade para estabelecimento da validade de uma conjectura. Contudo, a demonstração não é um requisito necessário para a convicção – pelo contrário, a convicção é mais frequentemente um pré-requisito para a procura de uma demonstração. (Por que esquisita e obscura razão gastaríamos por vezes meses a tentar provar certas conjecturas, se não estivéssemos já convencidos da sua verdade?)

O bem conhecido George Polya (1954, p. 83-84) escreve:

> ...tendo verificado o teorema em muitos casos particulares, obtivemos uma forte evidência indutiva a seu respeito. A fase indutiva venceu a nossa suspeita inicial e deu-nos uma forte **confiança** no teorema. Sem tal **confiança** dificilmente teríamos encontrado coragem para empreender a sua demonstração que não parece de modo algum uma tarefa rotineira. Quanto se está convencido que o teorema é **verdadeiro**, começamos a **demonstrá-lo**. (*bold* acrescentado).

Em situações como a anterior, em que a convicção anterior à demonstração fornece a motivação para a demonstração, a função da demonstração deve claramente ser qualquer coisa diferente da verificação/convencimento.

Na investigação matemática real, a convicção pessoal depende habitualmente de uma combinação de intuição, verificação quase-empírica e da existência de uma demonstração lógica (mas não necessariamente rigorosa). De facto, um alto grau de convicção pode ser algumas vezes atingido mesmo na ausência de uma demonstração. Por exemplo, na sua discussão da "evidência heurística" que suporta o teorema dos primos gémeos, ainda por demonstrar, e da famosa Hipótese de Riemann, Davis e Hersh (1983, p. 369) concluem que esta evidência "é tão forte que resulta em convicção mesmo na ausência de uma demonstração rigorosa".

Que a convicção para os matemáticos não é alcançada somente pela demonstração é também claramente indicada pela observação feita por um ex-editor das *Mathematical Reviews*, ao referir que aproximadamente metade das demonstrações aí publicadas estavam incompletas e/ou continham erros, embora os teoremas que pretendiam demonstrar fossem essencialmente verdadeiros (Hanna, 1983, p. 71). Os investigadores matemáticos, por exemplo, raramente examinam em detalhe as demonstrações publicadas, mas confiam em vez disso na autoridade reconhecida do autor, na verificação em certos casos especiais e numa avaliação informal, onde procuram ver se "os métodos e os resultados se ajustam, parecem aceitáveis..." (Davis e Hersh, 1986, p. 67). Também, de acordo com Hanna (1989), a razoabilidade dos resultados é considerada muitas vezes em primeiro lugar relativamente à existência de uma prova completamente rigorosa.

Normalmente, os matemáticos, quando estão a investigar a validade de uma nova conjectura, não observam apenas as demonstrações, mas tentam ao mesmo tempo encontrar contra-exemplos por meio de testes quase-empíricos, dado que tais testes podem revelar contradições encobertas, erros ou hipóteses não assumidas. Deste modo podem ser criados contra-exemplos, obrigando os matemáticos a reconstruir demonstrações anteriores ou a construir novas demonstrações.

A falta de êxito na rejeição empírica de conjecturas desempenha, na procura da convicção, um papel tão importante como o processo da justificação dedutiva. Tudo leva a crer que existe uma dimensão lógica, a par de uma psicológica, na obtenção da certeza. Logicamente, exigimos alguma forma de demonstração dedutiva, mas psicologicamente parece que precisamos ao mesmo tempo de alguma experimentação exploratória ou compreensão intuitiva. Sem dúvida, dadas as limitações próprias bem conhecidas da intuição e dos métodos quase-empíricos, a argumentação precedente não significa de modo algum ignorar a importância da demonstração como um meio indispensável de verificação, especialmente no caso de resultados duvidosos ou surpreendentes, por não serem intuitivos. Pretende sim colocar a demonstração numa perspectiva mais apropriada em oposição a uma idealização distorcida da demonstração como único (e absoluto) meio de verificação/convicção.

A demonstração como processo de explicação

Embora por meio de verificações quase-empíricas (por exemplo, construções e medições rigorosas, substituições numéricas, e outras) seja possível atingir de facto um alto nível de confiança na validade de uma conjectura, estes processos não fornecem em geral uma explicação satisfatória da razão pela qual pode ser verdadeira. Apenas confirmam que é verdadeira, e embora a consideração de mais e mais exemplos possa aumentar ainda mais a nossa confiança, não obtemos uma sensação psicológica satisfatória de esclarecimento – a compreensão ou percepção de como a conjectura é consequência de outros resultados conhecidos. Por exemplo, apesar da convincente evidência heurística em apoio da já mencionada Hipótese de Riemann, ainda existe necessidade premente de uma explicação, como escrevem Davis e Hersh (1982, p. 368):

> É interessante perguntar, num contexto como este, porque sentimos ainda a necessidade de uma demonstração... Parece claro que desejamos uma demonstração porque... se algo é verdadeiro e não conseguimos demonstrá-lo, este é um sinal de falta de compreensão da nossa parte. Por outras palavras, acreditamos que uma demonstração seria um modo de compreendermos porque razão a conjectura de Riemann é verdadeira, o que é algo mais do que sabermos através de um raciocínio heurístico convincente que é verdadeira.

Gale (1990, p. 4) também salienta, no texto seguinte, em referência às descobertas experimentais de Feigenbaum em geometria fractal, que a função das posteriores demonstrações foi a de explicação e não, de modo algum, de verificação:

> Lanford e outros matemáticos não estavam a tentar validar os resultados de Feigenbaum mais do que, digamos, Newton estava a tentar **validar** as descobertas de Kepler sobre as órbitas dos planetas. Em ambos os casos a validade dos resultados nunca esteve em questão. O que faltava era uma **explicação**. Porque eram elípticas as órbitas? Porque satisfazem certas relações particulares?... há um mundo de diferença entre validação e explicação. (*bold* acrescentado)

Assim, na maior parte dos casos em que os resultados em questão são intuitivamente evidentes por si mesmos e/ou são apoiados numa quase-empírica evidência convincente, a função da demonstração para os matemáticos não é a de verificação, mas sim a de explicação (ou outras funções da demonstração descritas a seguir).

De facto, para muitos matemáticos o aspecto de clarificação/explicação de uma demonstração tem mais importância que o de verificação. Por exemplo, o bem conhecido Paul Halmos afirmou há algum tempo que embora a demonstração assistida por computador do teorema das quatro cores, por Appel e Haken, o convencesse que era verdadeiro, pessoalmente preferiria uma demonstração que também fornecesse uma "compreensão" (Albers, 1982, pp. 239-240). Manin (1981, p. 107) e Bell (1976, p. 24) também acreditam que a explicação é um bom critério para definir o que é uma "boa" demonstração, afirmando respectivamente que é "aquela que nos torna mais inteligentes" e aquela que esperamos "transmita uma percepção da razão porque a proposição é verdadeira".

A demonstração como processo de descoberta

Diz-se frequentemente que os teoremas são a maior parte das vezes descobertos por meio da intuição e de métodos quase-empíricos, antes de serem verificados através de demonstrações. Contudo, existem numerosos exemplos, na história da matemática, de novos resultados que foram descobertos ou inventados por processos puramente dedutivos; de facto, é completamente improvável que alguns resultados (como por exemplo as geometrias não-euclidianas) pudessem alguma vez ter sido encontrados por mera intuição e/ou pela utilização de métodos quase-empíricos. Mesmo no contexto de processos dedutivos formais como a axiomatização ou a criação de novas definições, a demonstração pode frequentemente levar a novos resultados. Para o matemático profissional, a demonstração não é apenas um meio de verificação de um resultado já descoberto, mas também muitas vezes um processo de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados (comparar Schoenfeld, 1986 e De Jager, 1990).

Consideremos o seguinte exemplo. Suponhamos que construímos um papagaio dinâmico com o *Sketchpad*

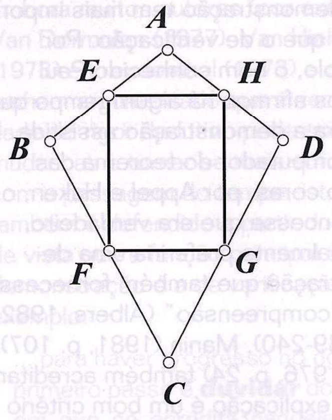

Figura 1

e unimos os pontos médios dos lados formando o quadrilátero *EFGH*, como se mostra na figura 1.

Visualmente, *EFGH* parece um rectângulo, o que pode ser confirmado facilmente medindo os ângulos. Arrastemos um dos vértices do papagaio *ABCD* para uma nova posição.

Podemos verificar que *EFGH* se mantém rectângulo. Podemos arrastar o vértice *A* na direcção de *C* até que *ABCD* se torne côncavo e verificar assim que *EFGH* é ainda um rectângulo nestas condições. Embora este tipo de variação contínua nos possa convencer facilmente, não fornece uma explicação satisfatória da razão pela qual o quadrilátero definido pelos pontos médios dos lados de um papagaio é um rectângulo. Contudo, se fizermos uma demonstração dedutiva desta conjectura, notamos imediatamente que a perpendicularidade das diagonais é a característica essencial de que depende a conjectura, e que a propriedade da igualdade dos lados adjacentes não é requerida. (A demonstração é deixada ao cuidado do leitor).

Por outras palavras, podemos imediatamente generalizar o resultado para qualquer quadrilátero com diagonais perpendiculares (um *quadrilátero perpendicular*), como mostra a figura 2). Isto contrasta com o facto do resultado geral não ser de forma alguma sugerido pela verificação puramente empírica da hipótese original. Mesmo uma investigação empírica sistemática dos vários tipos de quadriláteros não ajudaria provavelmente a descobrir o caso geral, dado que o mais normal seria que restringíssemos a nossa investigação aos quadriláteros mais familiares, como os paralelogramos, os rectângulos, os losangos, os quadrados e os trapézios isósceles.

O teorema de Ceva (1678) foi descoberto provavelmente num processo dedutivo semelhante a partir da generalização da demonstração da concorrência das medianas de um triângulo, e não através de construções e medições concretas (ver De Villiers, 1988). Contudo, novos resultados podem também ser descobertos *a priori*, simplesmente analisando dedutivamente as propriedades de objectos dados. Por exemplo, sem recorrer a qualquer construção e medição concreta, é possível deduzir rapidamente que *AB* + *CD* = *BC* + *DA* para o quadrilátero *ABCD* circunscrito em torno de uma circunferência (figura 3), usando o teorema da igualdade das tangentes tiradas a uma circunferência a partir de um ponto exterior (*AS* = *AP*, *DS* = *DR*, etc.).

A demonstração como processo de sistematização

A demonstração revela as subjacentes relações lógicas entre afirmações de um modo que nenhum número de testes quase-empíricos ou a intuição pura seriam capazes de realizar. A demonstração é assim uma ferramenta indispensável para transformar num

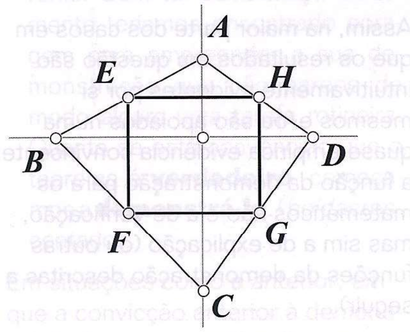

Figura 2

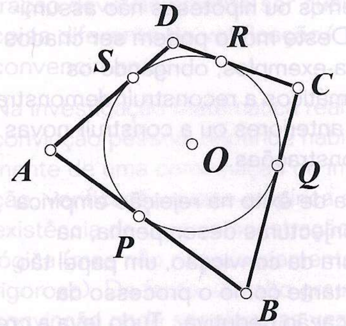

Figura 3

sistema dedutivo de axiomas, definições e teoremas, um conjunto de resultados conhecidos. Algumas das funções mais importantes de uma sistematização dedutiva de resultados conhecidos são assim apresentadas por De Villiers (1986):

- Ajuda a identificar inconsistências, argumentos circulares, e hipóteses escondidas ou não explicitamente declaradas.
- Unifica e simplifica as teorias matemáticas ao integrar e ligar entre si afirmações, teoremas e conceitos não relacionados, conduzindo assim a uma apresentação económica dos resultados.
- Fornece uma perspectiva global ou vista de conjunto de um tópico, ao mostrar a estrutura axiomática subjacente do tópico a partir da qual todas as outras propriedades podem ser derivadas.
- Constitui uma ajuda para as aplicações tanto dentro como fora da matemática, pois torna possível verificar a possibilidade de aplicação de toda uma estrutura complexa ou teoria através de uma avaliação da aplicabilidade dos seus axiomas e definições.
- Conduz muitas vezes a sistemas dedutivos alternativos que fornecem novas perspectivas e/ou são mais económicos, elegantes e poderosos do que os existentes.

Embora alguns elementos de verificação estejam obviamente presentes aqui, o principal objectivo não é claramente "verificar se certas afirmações são realmente verdadeiras" mas organizar afirmações isoladas e não relacionadas logicamente, que já se sabem ser verdadeiras, *num todo unificado e coerente*. Devido à perspectiva global resultante de tal simplificação e unificação, também está presente certamente um claro elemento de explicação quando a demonstração é utilizada como processo de sistematização. Neste caso, contudo, o ponto de incidência dirige-se a uma explicação global e não local.

Assim, é realmente falso dizer na escola, quando se demonstram afirmações evidentes por si próprias, tais como a igualdade dos ângulos verticalmente opostos, que estamos a "adquirir a certeza". Os matemáticos estão muito menos preocupados com a verdade desses teoremas do que com a sua sistematização no seio de um sistema dedutivo.

A demonstração como meio de comunicação

Alguns autores têm salientado a importância da função comunicativa da demonstração, como por exemplo:

> ...parece que a demonstração é uma forma de **discurso**, um meio de comunicação entre pessoas fazendo matemática. (*bold* acrescentado) Volmink (1990, p. 8)

> ... reconhecemos que o argumento matemático é dirigido a uma audiência humana, que possui um conhecimento subjacente que lhe permite compreender as intenções do orador ou do autor. Ao declarar que o argumento matemático não é mecânico ou formal, declarámos também implicitamente o que ele é... nomeadamente, uma **interacção humana** baseada em significados partilhados, nem todos de carácter verbal ou dizendo respeito a fórmulas. (*bold* acrescentado) Davis e Hersh (1986, p. 73)

De modo semelhante, Davis (1976) também enunciou que um dos valores concretos da demonstração é a criação de um fórum para debate crítico. De acordo com este ponto de vista, a demonstração é um modo único de comunicar resultados matemáticos entre matemáticos profissionais, entre professores e alunos, e entre os próprios estudantes. A tónica é colocada portanto no processo social de comunicar e disseminar o conhecimento matemático na sociedade. A demonstração, como forma de interacção social, também envolve portanto uma negociação subjectiva não apenas dos significados dos conceitos em jogo, mas também implicitamente dos critérios relativos ao que é um argumento aceitável. Por sua vez, a filtragem social de uma demonstração através destas várias comunicações contribui para o seu refinamento e a identificação de erros, bem como por vezes para a sua rejeição devido à descoberta de um contra-exemplo.

A demonstração como desafio intelectual

Para os matemáticos, a demonstração é um desafio intelectual que acham tão apelativo como outras pessoas podem achar os *puzzles* ou outras ocupações ou projectos criativos. Muitas pessoas têm experiência suficiente, quanto mais não seja nas suas tentativas de resolução de palavras cruzadas ou de *puzzles*, para compreender o que se diz da exuberância com que Pitágoras ou Arquimedes celebraram a descoberta das suas demonstrações. Fazer demonstrações pode também ser comparado com o desafio físico de completar uma maratona ou o triatlo, e a satisfação que daí resulta. Neste sentido, a demonstração cumpre uma função *gratificante e de realização própria*. A demonstração é portanto um campo de teste para a energia intelectual e engenho do matemático (ver Davis e Hersh, 1983, p. 369). Parafraseando o comentário famoso de Mallory sobre os seus motivos para subir ao Monte Evereste: *Demonstramos os nossos resultados porque eles estão diante de nós.* Levando esta analogia ainda mais longe: muitas vezes não é a existência da montanha que está em dúvida (a verdade do resultado), mas se (e como) seremos capazes de conquistá-la (demonstrá-la)!

Finalmente, embora as seis anteriores funções da demonstração tenham características que as distinguem, muitas vezes estão todas misturadas em casos específicos. Em alguns casos certas funções predominam sobre outras, enquanto noutros casos certas funções não estão mesmo presentes. Além disso, esta lista de funções não é de forma alguma completa. Por exemplo, poderíamos facilmente juntar uma função estética ou uma de *memorização*, ou ainda de desenvolvimento algorítmico (Renz, 1981 e Van Asch, 1993).

Ensino da demonstração com o *Sketchpad*

Quando os alunos já investigaram com cuidado uma conjectura geométrica por meio de uma variação contínua, com um *software* como o *Sketchpad*, têm pouca necessidade de adquirir maior convicção ou de proceder à sua verificação. Portanto, a verificação não serve ou serve de pouca motivação para fazer uma demonstração. Contudo, constatei que é relativamente fácil suscitar nova curiosidade ao perguntar porque razão pensam que um resultado específico é verdadeiro; ou seja, desafiá-los a

Figura 4

tentar *explicá-lo*. Os alunos admitem rapidamente que a verificação indutiva apenas confirma o resultado; não dá nenhuma percepção satisfatória, ou compreensão sobre a forma como a conjectura é consequência de outros resultados conhecidos. Por este motivo, aos olhos dos alunos, é perfeitamente compreensível encarar um argumento dedutivo como uma tentativa de explicação, e não de verificação.

Também é aconselhável introduzir cedo a função de descoberta da demonstração e dar atenção aos aspectos relativos à comunicação, negociando e clarificando com os alunos os critérios para a evidência aceitável, a heurística subjacente e a lógica da demonstração. A função de verificação deve ficar reservada apenas para os resultados em relação aos quais os alunos mostrem de modo genuíno ter dúvidas. Embora alguns alunos possam não sentir a demonstração como um desafio intelectual, são capazes de apreciar que assim seja para outros. Além disso, na matemática real, como qualquer pessoa com um pouco de experiência pode testemunhar, a função pura de sistematização apenas se torna presente num estádio avançado da prática da demonstração, pelo que deve ser evitada num curso introdutório sobre a demonstração. Parece fazer sentido iniciar os alunos nas várias funções da demonstração numa sequência como a indicada na figura 4, embora não de uma maneira estritamente linear, mas numa espécie de espiral em que funções já introduzidas são retomadas e ampliadas. Os capítulos deste livro estão organizados de acordo com esta sequência, e algumas indicações sobre este modo de proceder são sugeridas na respectiva Introdução.

Referências

Albers, D. J. 1982. Paul Halmos: Maverick Mathologist. *The Two-year College Mathematics Journal*, 13(4), 234-241.

Albert, D. 1988. Towards new Customs in the Classroom. *For the Learning of Mathematics*, 8(2), 31-32;43.

Bell, A.W. 1976. A study of pupils' proof-explanations in Mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.

Davis, P.J. 1976. The nature of proof. In Carss, M. (Ed). *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematics Education*, Boston: Birkhauser.

Davis, P.J. e R. Hersh. 1983. *The Mathematical Experience*. Great Britain: Pelikan Books.

Davis, P.J. e R. Hersh. 1986. *Descartes' Dream*. New York: HBJ Publishers.

Deer, G.W. (1969). The effects of teaching an explicit unit in logic on students' ability to prove theorems in geometry. Unpublished doctoral dissertation: Florida State University. Dissertation Abstracts International. 30, 387-399.

De Jager, C.J. 1990. When should we use pattern? *Pythagoras*, 23, 11-14.

De Villiers, M.D. 1986. *The role of axiomatization in mathematics and mathematics teaching*. RUMEUS Studies in mathematics education No. 2. University of Stellenbosch.

De Villiers, M.D. 1988. What happens if? Why? *Pythagoras*, 18, 45-47.

Donaldson, M. 1979. *Children's Minds*. New York: W. W. Norton.

Fischbein, E. 1982. Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 9-18.

Freudenthal, H. (Ed). 1958. *Report on Methods of Initiation into Geometry*. Groningen: Wolters.

Freudenthal, H. 1973. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel.

Gale, D. 1990. Proof as explanation. *The Mathematical Intelligencer*, 12(1), 4.

Gonobolin, F.N. 1954. Pupils's Comprehension of Geometric proofs. In Wilson, J.W. (Ed). 1975. *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*. Vol. XII, Problems of Instruction. Chicago: University of Chicago.

Hanna, G. 1983. *Rigorous proof in mathematics education*. Toronto: OISE Press.

Hanna, G. 1989. More than formal proof. *For the Learning of Mathematics*, 9(1), 20-23.

Hewson, S.N.P. 1977. Inferential problem solving in young children. Unpublished doctoral dissertation: Oxford University.

Human, P.G. 1978. Wiskundige werkwyses in Wiskunde-onderwys. Unpublished doctoral dissertation: University of Stellenbosch.

Kline, M. 1973. *Why Johnny can't add: the failure of the new math*. New York: St. martin's Press.

Krygowska, A.Z. 1971. Treatment of the Axiomatic method in Class. In Servais, W. e Varga, T. *Teaching school mathematics*. Penguin-Unesco, London, 124-150.

Manin, Y.I. 1981. A Digression on Proof. *The Two-year college Mathematics Journal*, 12(2), 104-107.

Mueller, D.J. 1975. Logic and the ability to prove theorems in geometry. Unpublished doctoral dissertation: Florida State University. Dissertation Abstracts International, 36, 851A.

Polya, G. 1954. *Mathematics and Plausible Reasoning. Induction and Analogy in Mathematics*. Vol. 1. Princeton: Princeton University Press.

Renz, P. 1981. Mathematical Proof: What it is and what it ought to be. *The Two-year College Mathematics Journal*, 12(2), 83-103.

Schoenfeld, A.H. 1986. On Having and Using geometric Knowledge. In Hiebert, J. (Ed). *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Tall, D. 1989. The Nature of Mathematical proof. *Mathematics Teaching*, 127, June, 28-32.

Van Asch, A.G. 1993. To prove, why and how? *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 24(2), 301-313.

Van Dormolen, J. 1997. Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 27-34.

Van Hiele, P.M. 1973. *Begrip en Inzicht*. Purmerend: Muusses.

Volmink, J.D. 1990. The Nature and Role of Proof in Mathematics Education. *Pythagoras*, 23, 7-10.

Wallington, B.A. 1974. Some aspects of the development of reasoning in preschool children. Unpublished doctoral dissertation: University of Edinburgh.

Wason, P.C. e P.N. Johnson-Laird, 1972. *Psychology of reasoning: Structure and Content*. London: Batsford.

Walter, R.L. 1972. The effect of knowledge of logic in proving mathematical theorems in the context of mathematical induction. Unpublished doctoral dissertation: Florida State University,. Dissertation Abstracts International, 33, 262A.

Wilder, R.L. 1994. The nature of mathematical proof. *American mathematical Monthly*, 51, 309-323.

Michael D. de Villiers
University of Durban-Westville
South Africa
profmd@mweb.co.za
http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html

Tradução
Eduardo Veloso

N. T.

Este texto é traduzido e publicado com a autorização do autor. É uma versão revista do artigo "The role and function of proof in mathematics", *Pythagoras*, Nov. 1990, 24, 17-24.