Sequências que olham para si próprias

Eurico Nogueira

Se soubermos olhar para as sequências, vamos descobrir que, muitas vezes, incluem por entre os seus termos uma cópia de si próprias: são as sequências auto-referentes. E esta auto-referência pode ocorrer de múltiplas formas, consoante se trate de uma sequência fractal, *olha e conta* ou *olha e diz*.

A matemática encontra-se cheia de sequências numéricas: a dos inteiros, dos números pares, dos primos... Para muitas se se pretende conhecer o *n*-ésimo termo não há necessidade de saber quais foram os termos que o precederam; mas para outras esse conhecimento é imprescindível visto que a construção da sequência se baseia exactamente nesse facto. Outras há, ainda mais estranhas, que, num certo sentido, "olham" para si próprias. Vamos ver alguns exemplos. Começamos pelo quadro de Wythoff (ver figura), que é construído da seguinte forma:

i) A primeira coluna é a sequência dos números naturais, começando em 0.
ii) A segunda coluna é dada pela característica (parte inteira) de $(n+1)\varphi$ onde $\varphi = (1+\sqrt{5}) / 2$ é o número de ouro.
iii) Cada linha é gerada pela sucessiva adição de cada par de elementos consecutivos dessa mesma linha.

É um quadro muito interessante. Mas para que serve?

0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521
2	4	6	10	16	26	42	68	110	178	288	466	754
3	6	9	15	24	39	63	102	165	267	432	699	1131
4	8	12	20	32	52	84	136	220	356	576	932	1508
5	9	14	23	37	60	97	157	254	411	665	1076	1741
6	11	17	28	45	73	118	191	309	500	809	1309	2118
7	12	19	31	50	81	131	212	343	555	898	1453	2351
8	14	22	36	58	94	152	246	398	644	1042	1686	2728
9	16	25	41	66	107	173	280	453	733	1186	1919	...
10	17	27	44	71	115	186	301	487	788	1275		...
11	19	30	49	79	128	207	335	542	877		...	
12	21	33	54	87	141	228	369	597		...		
13	22	35	57	92	149	241	390		...			
...	...	...		...		...		...				

No que se segue vamo-nos restringir apenas aos números situados à direita do traço vertical: podemos reparar que em cada linha o primeiro elemento é sempre o menor elemento que ainda não havia aparecido nas linhas anteriores; todas as linhas e colunas são estritamente crescentes; se um número de uma linha surgir entre dois números consecutivos de alguma outra linha, a alternância entre estas linhas mantém-se indefinidamente (por exemplo, como o 6 da terceira linha surge "entre" o 5 e o 8 da primeira, os números que vêm a seguir ao 6 — o 10 e o 16 — surgem entre os que vêm a seguir ao 8 da primeira linha, isto é, o 10 está entre o 8 e o 13 e o 16 está entre o 13 e o 21)... e qualquer número natural, a partir do 1, aparece neste quadro.

Note-se, como curiosidade, que no topo deste quadro surgem algumas sequências linearmente recorrentes muito conhecidas: a de Fibonacci — 0,1,1,2,3,5,8, ... e a de Lucas — 1,3,4,7,11,18, ...

Baseados neste quadro podemos construir a sequência chamada para-Fibonacci, que nos diz qual o índice da linha deste quadro em que aparece o número *n*. Vejamos: o 1 está na linha 0, o 2 está na linha 0, o 3 está na linha 0, o 4 está na linha 1, o 5 está na linha

0, o 6 está na linha 2, o 7 está na linha 1, o 8 está na linha 0, o 9 está na linha 3, etc. Portanto a sequência começa assim:

0, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 4, 0, 5, 3, 2, 6, 1, 7, 4, 0, 8, 5, 3, 9, 2, 10, 6, 1, 11, 7, 4, 12, ...

Repare-se que se eliminarmos nesta sequência a primeira ocorrência de cada número

0, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 4, 0, 5, 3, 2, 6, 1, 7, 4, 0, 8, 5, 3, 9, 2, 10, 6, 1, 11, 7, 4, 12, ...

obtém-se:

0, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 4, 0, 5, 3, 2, 6, 1, 7, 4, 0, 8, 5, 3, 9, 2, 10, 6, 1, 11, 7, 4, 12, ...

isto é, de novo, a mesma sequência.

Quando isto sucede diz-se que estamos perante uma sequência fractal. Uma outra sequência fractal é dada por:

1, 1, 2, 1, 3, 2, 4, 1, 5, 3, 6, 2, 7, 4, 8, 1, 9, 5, 10, 3, 11, 6, 12, 2, 13, 7, 14, 4, 15, 8,...

em que o segundo 1 surge uma casa depois do primeiro, o terceiro duas casas depois do segundo e, genericamente, o n-ésimo surge 2^{n-2} casas depois do (n-1)-ésimo. Quanto aos outros números: o 2 ocupa a primeira casa vaga e o n-ésimo dois aparece $3x2^{n-2}$ casas depois do (n-1)-ésimo, o 3 ocupa a primeira casa que ainda está vaga e o n-ésimo três aparece $5x2^{n-2}$ casas depois do (n-1)-ésimo. Genericamente o número k ocupa a primeira casa ainda vaga e o n-ésimo k aparece $(2k-1)x2^{n-2}$ casas depois do (n-1)-ésimo. E é claro que se retirarmos a primeira ocorrência de cada número obtemos ainda a mesma sequência.

Um outro exemplo de sequência fractal é dado pela "assinatura de um número", desde que este seja positivo e irracional. Seja R esse elemento e consideremos todos os números da forma i+jR onde i,j são números naturais. Se os ordenarmos por ordem crescente a sequência dos i é fractal. Consideremos por exemplo o número $\sqrt{2}$ que é, aproximadamente, 1,41421.

Sabe-se que os menores elementos desta sequência são os seguintes:

$$1+\sqrt{2}\approx 2{,}41421 < 2+\sqrt{2}\approx 3{,}41421 < 1+2\sqrt{2}\approx 3{,}82842 < 3+\sqrt{2}\approx 4{,}41421 <$$
$$2+2\sqrt{2}\approx 4{,}82842 < 1+3\sqrt{2}\approx 5{,}24264 < 4+\sqrt{2}\approx 5{,}41421 < 3+2\sqrt{2}\approx 5{,}82842 <$$
$$2+3\sqrt{2}\approx 6{,}24264 < 5+\sqrt{2}\approx 6{,}41421 < 1+4\sqrt{2}\approx 6{,}65685 < 4+2\sqrt{2}\approx 6{,}82842 < \ldots$$

Portanto a "assinatura" de $\sqrt{2}$ corresponde à sequência fractal:

1, 2, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 2, 5, 1, 4, 3, 6, 2, 5, 1, 4, 7, 3, 6, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 3, 6, 9, 2, 5, 8, ...

Se retirarmos a primeira aparição de cada número obtemos ainda a mesma sequência!

Reparemos agora na sequência "Olha e diz" de John Horton Conway. Suponhamos que o termo inicial da sequência é o número 4. Então os seguintes serão:

14, 1114, 3114, 132114, 1113122114, 311311222114, 13211321322114, 1113122113121113222114, ...

em que cada novo termo é construído "lendo", ou se preferirem, fazendo o "comentário" do anterior. Assim quando se lê o 14 obtemos "um" 1 e "um" 4 que, escrito, fica 1114. Analogamente 3114 é lido: "um" 3, "dois" 1 e "um" 4, donde o 132114. Conway apercebeu-se que, à excepção da sequência formada pelo 22, todas as sequências construídas desta forma possuem elementos cujo número de dígitos cresce a cada passo, aproximadamente, 30%. À medida que aumenta, o comprimento dos elementos destas sequências comporta-se cada vez mais como uma função do tipo $C\lambda^n$, onde C é uma constante e λ=1,303577269034296... é a chamada constante de Conway. Esta corresponde à maior raiz de um polinómio de grau 71, que se encontra intimamente relacionado com estas sequências.

Conway também notou que todas estas sequências são construídas com base em 92 "tijolos", isto é, elementos básicos. Por analogia com a tabela periódica atribuiu a cada um desses elementos um símbolo químico e um número atómico. Assim o elemento correspondente ao número 3, por ser o menos frequente, recebeu o número "químico" 92 e passou a ser designado como sendo o "urânio"; o elemento 22 — o único estacionário (verifiquem porquê) — corresponde ao "hidrogénio". A classificação destes 92 elementos distintos recebeu o título pomposo de "Teorema cosmológico".

Baseados nesta sequência é possível criar uma sequência *Olha e conta* semelhante à anterior, mas com a diferença de que, em vez de "lermos" o anterior elemento da sequência, "contamos" os seus algarismos a começar pelo mais baixo. Suponhamos que o termo inicial da sequência é, de novo, o número 4. Então os seguintes serão:

4, 14, 1114, 3114, 211314, 31121314, 41122314, 31221324, 21322314, ...

Vejamos, como exemplo, o que se passa com o 211314; como neste número há "três" 1, "um" 2, "um" 3 e "um" 4 o número seguinte é, logicamente, o 31121314. Repare-se agora que a sequência, ao atingir o 21322314, entra num ciclo. O número 21322314 é assim um ponto fixo desta sequência dado que se lê a si próprio!

Para os números de 1 a 50, que não incluem zeros, obtivemos os seguintes resultados:

Números	Ciclo que atingem
d, 1d, 3d (d=1, ..., 4), 21, 23, 41, 43	21.32.23.14
d, 1d, 3d (d=5, ..., 9), 4d (d=5, 6)	31.22.33.14.1d
22	22
2d (d=4, ..., 9)	31.12.33.1d
42, 44	31.12.33.14
4d (d =7, 8, 9)	(41.22.23.24.15.1d, 31.42.13.24.15.1d)

Quando se atinge um único número diz-se que se atingiu um número que se descreve a si próprio, ou se preferirem "auto-referente". Nesta tabela foi visto que os números 47, 48 e 49 atingem um ciclo formado por dois elementos. Isso não é uma situação excepcional; bem pelo contrário, é extremamente frequente. Por exemplo, o 2029 após 18 entra no ciclo:

(10.81.22.13.24.15.16.27.18.19,
10.71.42.13.14.15.16.17.28.19).

Haverá ciclos formados por mais que dois elementos? Sim! Por exemplo:

(10.51.22.23.14.25.16,
10.41.42.14.14.25.16,
10.51.22.13.34.15.16).

Prova-se que, por este processo, todos os números vão sempre atingir algum ciclo e que não existem ciclos de comprimento superior a três.

Olhando para estes exemplos poder-se-ia pensar que todos os números que integram um ciclo de auto-referência têm um número par de algarismos. Mas isso é falso! Basta verificar que:

10.111.22.13.14.15.16.17.18.19
e 111.12.13.14.15.16.17.18.19

são auto-referenciais com, respectivamente, 21 e 19 algarismos.

Não é este o único exemplo de sequências que gera o seguinte elemento lendo o anterior. Um outro é dado por:

1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, ...

O primeiro número indica o número de "uns" presentes na sequência (apenas um) e escrevemos 1; o segundo indica o número de "dois" presentes na sequência (são dois) e escrevemos 2, 2; o terceiro indica o número de "três" presentes na sequência (são dois) e escrevemos 3, 3; o quarto indica o número de "quatros" presentes na sequência (são três) e escrevemos 4, 4, 4, ... E assim por diante!

Ainda outra sequência que se comporta desta forma é a de Lionel Levine:

11, 12, 112, 1123, 1112234,
11112223344567,

111111122222233333444455556
667778899101011121314,

... ...

que se lê, olhando, por exemplo, para o quarto termo da série (o 1123):

Como 3 é o algarismo das unidades o próximo número começa por três 1; como 2 é o algarismo das dezenas o próximo número tem dois 2 a seguir aos uns; como 1 é o algarismo das centenas o próximo número tem um 1 a seguir aos uns e dois; como 1 é o algarismo dos milhares o próximo número tem um 1 a seguir aos uns, dois e três.

Voltemos à auto-referência: uma curiosa sequência auto-referente é a de Aronson.

Originalmente escrita em inglês pode ser traduzida para português da seguinte forma: "e é a primeira, segunda, oitava, décima-terceira, vigésima-sexta, trigésima-segunda, trigésima-quinta, quadragésima-segunda, quadragésima-oitava, ..., letra desta frase." Isto é, ao lermos o início da frase "e é a..." apercebemo-nos de que a letra e é a primeira e a segunda letra da frase, o que nos permite continuá-la e escrever "e é a primeira, segunda, ...". Nas palavras "primeira" e "segunda" encontramos outros "e" os quais correspondem à oitava e à décima-terceira letras da frase; isto permite-nos continuar a frase: "e é a primeira, segunda, oitava, décima-terceira, ..." E o processo continua, em princípio, indefinidamente dado que, mais para a frente, surgem palavras como "centésima", "milésima", "milionésima", etc., que incluem a letra "e" !

A sequência pretendida é dada por 1, 2, 8, 13, 26, 32, 35, 42, 48, ...

Relacionado com este assunto encontramos a sequência de Kolakoski que começa assim:

122112122122112112212112122112112
1221221121...

e que tem a particularidade de "ler" o seu próprio "comprimento". Vejamos o que isto quer dizer: a sua primeira subsequência (formada por uns) tem 1 elemento, a segunda subsequência (formada só por dois) tem 2 elementos, a terceira subsequência (formada por uns) tem 2 elementos, a quarta subsequência (formada por dois) tem 1 elemento, a quinta subsequência (formada por uns) tem 1 elemento, etc. E esta sequência de comprimentos 12211... está a reproduzir a sequência de Kolakoski!

E para acabar, desafio os leitores a resolver os seguintes problemas de auto-referência:

1) Qual é o número cujo primeiro algarismo indica o número de zeros presentes no número, o segundo algarismo o número de uns presentes no número, etc.?

2) Que números temos de colocar nos espaços em branco para que as afirmações deste cartão sejam verdadeiras?

Linha 1. O algarismo 0 surge ___ vezes neste cartão.
Linha 2. O algarismo 1 surge ___ vezes neste cartão.
Linha 3. O algarismo 2 surge ___ vezes neste cartão.
Linha 4. O algarismo 3 surge ___ vezes neste cartão.
Linha 5. O algarismo 4 surge ___ vezes neste cartão.
Linha 6. O algarismo 5 surge ___ vezes neste cartão.

(in *Público*, 19-IX-1999, José Paulo Viana).

Nota

[1] Esta designação foi atribuída por analogia com as imagens fractais, as quais têm a particularidade de, a vários níveis de *profundidade*, repetir infinitas vezes sempre o mesmo padrão.

Bibliografia

Internet:

Hot sequences — http:/www.research.att.com~njas/sequences/shot.html

Puzzle sequences — http:/www.research.att.com/~njas/sequences/Spuzzle.html

Interspersions and dispersions —http://www.cedar.evansville.edu/~ck6/integer/intersp.html

Fractal sequences — http://www.cedar.evansville.edu/~ck6/integer/fractals.html

Livros:

CONWAY, John e GUY, Richard, *O Livro dos Números*, Editora Gradiva, 1999.

WEISSTEIN, *Eric CRC Encyclopedia*, 1999.

Soluções:

1) É o número 6210001000.

2) Há duas soluções que são dadas por:

Linha 1. O algarismo 0 surge 1 vezes neste cartão.
Lª 2. O algarismo 1 surge 3 vezes neste cartão.
Lª 3. O algarismo 2 surge 3 vezes neste cartão.
Lª 4. O algarismo 3 surge 4 vezes neste cartão.
Lª 5. O algarismo 4 surge 4 vezes neste cartão.
Lª 6. O algarismo 5 surge 2 vezes neste cartão.

Linha 1. O algarismo 0 surge 1 vezes neste cartão.
Lª 2. O algarismo 1 surge 3 vezes neste cartão.
Lª 3. O algarismo 2 surge 3 vezes neste cartão.
Lª 4. O algarismo 3 surge 5 vezes neste cartão.
Lª 5. O algarismo 4 surge 2 vezes neste cartão.
Lª 6. O algarismo 5 surge 3 vezes neste cartão.

Eurico Nogueira
Universidade Nova de Lisboa