Exploração do Poly — algumas ideias

Cristina Loureiro

Entre 30 de Novembro e 7 de Dezembro de 2000, a APM organizou no Visionarium uma grande exposição chamada *Poliedros e outras matemáticas*. Este artigo é uma homenagem aos milhares de poliedros que as escolas apresentaram nesta grande exposição, bem como aos milhares de alunos e centenas de professores que a visitaram.

Poly é um programa sobre poliedros que pode ser obtido através da internet no *poly site*, www.peda.com. A versão 1.0 deste programa foi divulgada em 1999. Neste momento vai já na versão 1.08 de 2000. Este programa é produção da *Pedagoguery Software Inc*, de origem canadiana.

É um programa extremamente simples que não é mais do que uma excelente base de dados de poliedros. Estes estão organizados por famílias: *platónicos, arquimedianos, poliedros de Johnson, poliedros de Catalan, prismas e antiprismas, deltaedros (deltahedra), bipirâmides e deltoedros (deltohedra), geodésicas e domos*.

No próprio programa o menu do *Help* dá acesso à caracterização de cada uma destas categorias de poliedros.

Na opção de preferências do Poly temos acesso a alterar:

- as categorias, ou famílias, de poliedros que o programa apresenta, no total de oito nesta versão do programa;
- os modos de ver os poliedros que o programa apresenta, no total de onze, nesta versão do programa;
- as condições para exportar as figuras para outros programas, de texto, de desenho ou de paginação, por exemplo;
- a língua de trabalho do programa (inglês canadiano ou inglês US).

> Poly é um programa muito simples que pode ser obtido através da *Internet*: é uma excelente base de dados de poliedros, permite olhar para estes objectos matemáticos, relacioná-los, integrá-los, desmontá-los e constituir deste modo um ponto de partida essencial para propostas de investigação a realizar pelos alunos.

Poliedros

O trabalho com estas figuras é uma forma de enriquecer o nosso imaginário sobre poliedros. Vem a propósito recordar algumas ideias breves do livro *Polyhedra*, de Peter R. Cromwell:

> Não há problema mais desafiante do que escrever um livro sobre a história dos poliedros e isso é decidir o que se entende pelo termo "poliedro". Um olhar de relance sobre as figuras deste livro dará uma ideia da variedade de objectos que têm sido descritos como poliedros. Procurar uma definição que os abarcasse a todos é impossível pois diferentes autores aplicaram o termo a muitas ideias diferentes, algumas delas até contraditórias. Ao nível mais elementar podemos perguntar se um poliedro é um objecto sólido ou uma superfície limitada. As respostas a esta questão dependem em larga medida do período em que os geómetras viveram e dos problemas que estudaram. Para um geómetra grego clássico um poliedro era um sólido. Nos últimos 200 anos, tornou-se mais conveniente pensar nos poliedros como superfícies. Hoje, alguns matemáticos olham para os poliedros como estruturas.
>
> Há quem diga que a única coisa que os poliedros têm em comum é o nome. Mas isso não é um chão muito seguro. Os poliedros das ilustrações claramente partilham algumas características. A sua propriedade mais óbvia é que todos eles são formados (ou limitados) por polígonos. Esta propriedade fundamental constituiu a definição de poliedro durante muitos séculos, mesmo não tendo sido explicitamente estabelecida. Como veremos, uma definição tão aberta pode

> ser interpretada de muitas maneiras. Não é necessária nenhuma restrição ao modo como os polígonos são associados e que tipos de polígonos podem ser utilizados. Esta ambiguidade tem sido extremamente frutuosa, permitindo a esta designação evoluir em diferentes direcções e conduzindo ao estudo de diferentes tipos de objectos poliédricos. Por isso mesmo, deixaremos poliedro como este termo tão vagamente definido. Ao longo do livro veremos como o seu significado foi refinado e alterado ao longo dos tempos.
> (adaptado de *Cromwell*, 1997, pp. 12-14)

Cada poliedro desta base de dados pode ser visto em perspectiva, oco ou compacto, só com arestas e vértices, em planificação, no modo de grafo, e ainda em mais algumas versões destas modalidades referidas. Em todos os modos de visualização o poliedro pode ser animado manualmente ou automaticamente, bem como reduzido e aumentado. Qualquer figura pode ser facilmente importada para outro programa de desenho, processamento de texto ou paginação.

Se olharmos os poliedros como objectos matemáticos que podem ser classificados, relacionados, interligados, desmontados, ..., esta base de dados é um excelente ponto de partida para propostas de investigações a realizar pelos alunos.

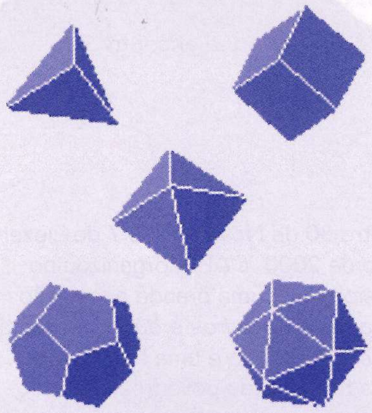
Classificação de poliedros

Uma família de poliedros acaba por ser um conjunto de poliedros organizados pelas suas características.

A discussão das características de cada família pode ser feita rapidamente, por observação, com a possibilidade de comparação rápida de elementos de famílias diferentes e com a obtenção de contra exemplos.

Experimentemos uma classificação de exigência crescente:

- Poliedros com faces todas congruentes: platónicos, de Catalan, alguns de Johnson.
- Poliedros com as faces todas congruentes e todas polígonos regulares: platónicos e alguns de Johnson.
- Poliedros com as faces todas congruentes, as faces todas polígonos regulares, com todas as arestas congruentes e com todos os vértices congruentes: platónicos.



O que caracteriza então os poliedros platónicos? Porque há só 5 poliedros que verificam estas condições?

Poliedros com mais do que um tipo de faces, todas elas polígonos regulares: arquimedianos, prismas e antiprismas, poliedros de Johnson.

Poliedros com mais do que um tipo de faces, todas elas polígonos regulares, com todas as arestas congruentes e com todos os vértices congruentes: arquimedianos.

O que caracteriza então os poliedros arquimedianos? Porque é que só há 13 poliedros que verificam estas condições?

A observação dos poliedros arquimedianos permite introduzir um tipo de notação simples e interessante para caracterizar cada poliedro.

Esta notação indica o número de lados dos polígonos regulares das faces e a forma como estas se dispõem num vértice:

3.6.6 — triângulo, hexágono, hexágono,

3.4.3.4 — triângulo, quadrado, triângulo, quadrado,

e assim por diante.

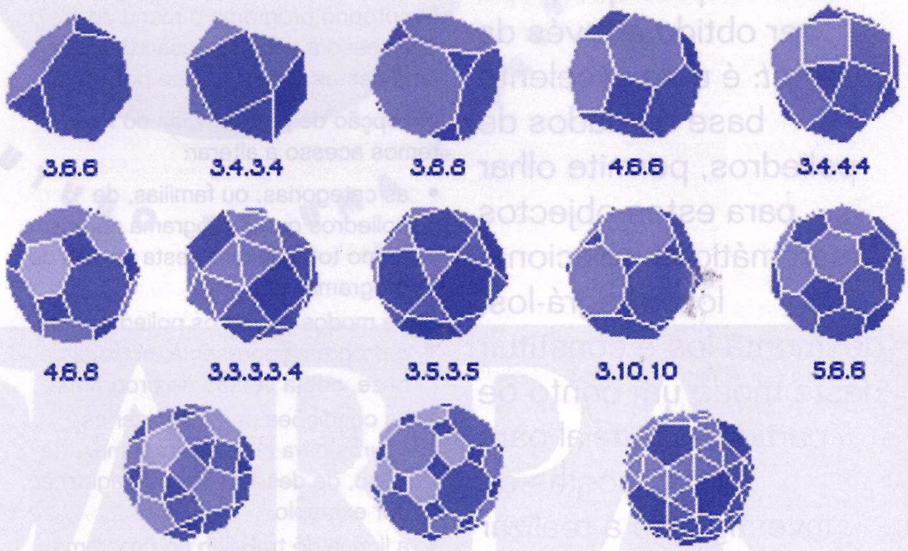
Os deltaedros convexos são os poliedros que se obtêm com faces triângulos equiláteros. É uma família muito interessante por ter um número finito de elementos e uma regularidade de construção com uma falha totalmente inesperada.

Dualidade entre poliedros

Considera-se que o primeiro estudo sistemático sobre a dualidade dos poliedros se deve a E. C. Catalan, por isso não é de estranhar que se procurarmos o dual de cada um dos poliedros arquimedianos obtenhamos uma nova família que tem precisamente o nome deste matemático: os poliedros de Catalan.

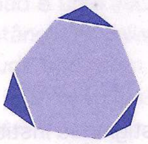
Uma forma de obter o poliedro dual de um poliedro arquimediano, ou de um poliedro platónico, é considerar o centro de cada uma das faces e uni-lo, por arestas, aos centros das faces que lhe são adjacentes. O novo poliedro obtido é o dual do anterior.

A tarefa de encontrar o dual de cada poliedro arquimediano é um excelente exercício de visualização e de estabelecimento de relações.



Pensando, por exemplo, no tetraedro truncado, podemos registar que o seu dual deverá ter 8 vértices que não poderão ser todos congruentes.

Haverá 4 vértices de cada um dos quais saem 6 arestas.



E haverá 4 vértices de cada um dos quais saem 3 arestas.

Isto acontece porque no tetraedro truncado há faces que são hexágonos e há faces que são triângulos.

Outra característica do dual do tetraedro truncado é que todas as suas faces deverão ser triângulos congruentes que são triângulos isósceles. Isto acontece porque o tetraedro truncado tem todos os vértices congruentes do tipo 3.6.6. O dual do tetraedro truncado é o *triakis tetrahedron*.

Tudo isto é muito estático aqui no texto, mas com as possibilidades de manipulação dos poliedros no Poly a visualização torna-se muito mais acessível.

Poliedros e planificações

Exemplo das excelentes potencialidades de visualização deste programa é uma actividade realizada por uma professora do 1° ciclo com os seus alunos do 3° ano. Conta-nos:

Na 3ª sessão com este programa pedi aos alunos que, em grupos de dois, abrissem o programa Poly e procurassem poliedros:

- só com faces triangulares;
- só com faces quadrangulares.

Pedi a cada grupo que imprimisse o poliedro que encontrou de duas maneiras:

- o poliedro construído na posição que achassem que melhor mostrava as faces;
- o poliedro planificado.

Posteriormente reuni todos os alunos em volta de uma grande mesa, pedi-lhes as folhas impressas e em volta deste material iniciámos um debate. Eu colocava as perguntas e cada grupo (par) respondia.

Comecei por dar a um grupo um poliedro impresso por outro grupo e pedir-lhe para contar o número de faces desse poliedro.

Nos casos em que me pareceu possível, pedi-lhes que contassem quantas eram as faces à vista e quantas estavam escondidas. De seguida pedi aos alunos que explicassem à turma a forma como tinham contado e como explicavam o número de faces escondidas que tinham indicado.

Depois pedi-lhes que descobrissem entre todas as páginas que eu possuía, qual a que continha a planificação daquele poliedro.

Fiz isto com vários grupos, em relação a vários poliedros, o que acabou por proporcionar um momento bastante rico, durante o qual pude sistematizar a noção de face, de vértice e de aresta. Em simultâneo verifiquei que muitos alunos tinham tido enormes necessidades de imaginar o poliedro (partir para a abstracção) e que o fizeram desenvolvendo algum esforço, mas demonstrando bastante entusiasmo.

(Excerto do relato de uma professora do 1° ciclo, trabalho não publicado.)

Contagens em poliedros

As actividades de contagem são das mais interessantes de realizar com este programa. Os diversos modos de ver o poliedro permitem uma contagem segura dos seus elementos:

- o tipo de faces e o número de cada uma delas podem ser muito bem vistos na planificação;
- o número de vértices pode ser totalmente visto na modalidade de grafo (*two-dimensional Schhlegel diagram*), uma das opções de apresentação do poliedro e de que ainda não tinhamos falado.
- o número de arestas pode ser obtido pela Igualdade de Euler ($F+V = A+2$)

Referências

Cromwell, Peter R.. 1997. *Polyhedra*. Cambridge University Press, UK.

Veloso, Eduardo. 1998. *Geometria — Temas Actuais*. IIE, Lisboa.

Cristina Loureiro

ESE de Lisboa