Das corridas de atletismo às rodas do comboio, passando pelos carrinhos eléctricos — uma forma diferente de «falar» da circunferência

Ana Vieira, Escola Secundária de Miraflores

A Geometria é um dos capítulos da matemática mais interessantes de ensinar, pois permite dar aulas mais vivas, não só pela diversidade de situações que se podem criar proporcionando resoluções diversificadas para o mesmo problema, como também, pelo menos a nível da Geometria elementar, por ser um tema que facilmente se liga à realidade.

A fórmula do perímetro da circunferência faz parte do programa do Ciclo Preparatório, mas normalmente o tempo é curto para dar o programa todo e este, assim como outros assuntos por vezes bem interessantes, são dados muito rapidamente, às vezes como um «despejar» de fórmulas, descansando no pensamento de que «eles já tinham obrigação de saber...»

Não pretendemos expor aqui uma forma diferente de dar o perímetro da circunferência mas sim, uma vez dado, seja em que ano de escolaridade for, mostrar com alguns exemplos simples como tem inúmeras e tão diferentes aplicações na vida real. É um trabalho elaborado a partir de um artigo da revista Mathematics Teacher e que foi adaptado e experimentado numa turma do 9.º ano de escolaridade (1986/87) e noutra do 7.º ano (1987/88).

Os alunos foram confrontados com uma série de problemas, agrupados em três grandes grupos e seriados de forma a, por um lado, aumentar gradualmente o grau de dificuldade e por outro, que as conclusões que se fossem tirando servissem para apoiar a resolução dos problemas seguintes. Fala-se em primeiro lugar de provas de atletismo, depois de corridas de carrinhos eléctricos e finalmente da forma das rodas do comboio.

Os problemas foram agrupados em fichas de trabalho, num total de oito fichas, que eram distribuídas e discutidas semanalmente.

Antes da distribuição da primeira ficha de trabalho, foi pedido aos alunos que fizessem um esboço das rodas de um comboio, observadas de frente, uma de cada lado de um eixo, respeitando o mais possível todos os pormenores da sua forma real. Os alunos ficaram admirados com este pedido, mas nada lhes foi dito quanto ao objectivo do mesmo, referindo-se apenas que se pretendia ver quem tinha melhor capacidade de observação.

Durante muitas semanas, eles foram trazendo os desenhos mais variados; contavam as suas peripécias sobre o *esforço* que tinham feito para observarem as rodas e discutiam entre si, frequentemente, sobre aquilo que tinham desenhado. Nunca lhes foi dito qual a forma real das rodas, mas enquanto não conseguiram acertar, dizia-se sempre que ainda faltava um pormenor.

Uma das escolas em que este trabalho foi realizado é em Oeiras e a outra em Algés, zonas servidas por comboio. Muitos alunos utilizavam diariamente este meio de transporte, alguns mais que uma vez por dia. Aperceberam-se nesta altura que, apesar disso, nunca tinham reparado para a forma das rodas, o que os deixou ao mesmo tempo admirados e curiosos.

Vamos expor as várias questões pela mesma ordem com que foram apresentadas e discutidas com os alunos, fazendo um breve comentário sobre a forma como reagiram em algumas situações.

Corridas de atletismo

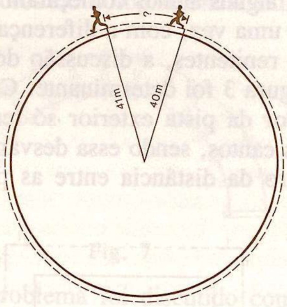

Fig. 1

Pergunta-se: «Numa prova de atletismo, dois corredores correm em pistas circulares, como indica a figura 1. Sabendo que a prova consta de uma volta completa, qual o avanço inicial que se deverá dar ao corredor da pista exterior, de forma que a prova seja efectuada em igualdade de circunstâncias (isto é, percorram a mesma distância)?»

Resolução: $2\pi 41 - 2\pi 40 = 2\pi\ (41\text{-}40) = 2\pi$.

Esta forma esquematizada de equacionar e resolver o problema não foi a forma utilizada pelos alunos. Eles calcularam separadamente o perímetro de cada pista, determinando em seguida a diferença. No entanto, todos chegaram ao resultado certo.

Em seguida, considera-se o mesmo problema mas fazendo variar os raios das pistas interior e exterior para 85 m/86 m; 1000 m/1001m e 11 m/13 m.

Depois deste conjunto de questões, pede-se aos alunos que tirem uma conclusão. Pretende-se que eles verifiquem que o avanço a dar ao corredor da pista exterior só depende da diferença entre os raios das duas pistas. Esta conclusão levantou sempre alguma polémica, pois intuitivamente parecia que o avanço tinha de ser tanto maior quanto maior fosse o raio dos círculos.

Colocam-se agora questões análogas, mas com pistas quadrangulares.

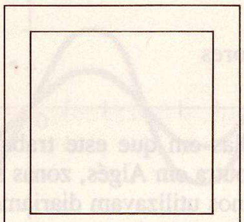

Fig. 2

Inicialmente supõe-se que a pista interior tem dois metros de lado e a distância entre as pistas é de um metro. Calculando o perímetro de cada pista e determinando a diferença, facilmente os alunos concluíram que o avanço a dar, neste caso, ao corredor da pista exterior para que a prova seja efectuada em igualdade de circunstâncias, tem de ser de 8 metros. Fazendo variar as dimensões, alguns alunos começaram a relacionar este avanço, mais uma vez, com a diferença entre as pistas. Para os mais renitentes, a discussão do problema com o apoio da figura 3 foi determinante. Concluíram então que o corredor da pista exterior só tem de facto desvantagem nos cantos, sendo essa desvantagem, em cada canto, o dobro da distância entre as pistas.

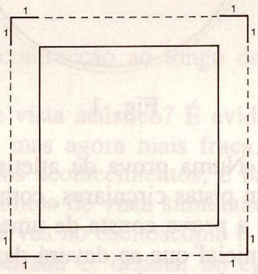

Fig. 3

Passa-se então para uma situação em que a figura se assemelha à forma real das pistas de atletismo.

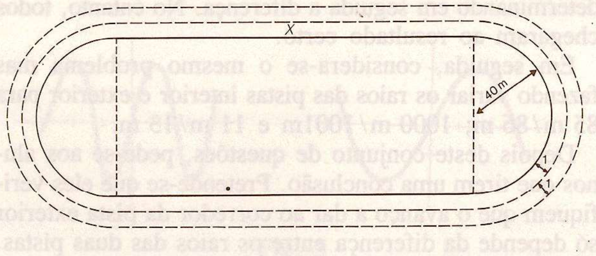

Fig. 4

Cada pista está simbolizada apenas por um traço (traço contínuo na pista interior e tracejado nas pistas intermédia e exterior);

As condições da figura são:

— a distância entre cada uma das pistas é de um metro;
— o raio de cada uma das semicircunferências da pista interior é 40 m;
— o perímetro da pista interior é 400 m.

O primeiro problema consiste em calcular o comprimento de cada troço rectilíneo das pistas. Os alunos calculam o perímetro das curvas da pista interior; em seguida, subtraem esse valor a 400 e dividem por dois. O comprimento de cada troço rectilíneo é aproximadamente 92 m, sendo o mesmo para todas as pistas.

Novamente se colocam um conjunto de questões sobre o avanço a dar ao corredor de cada uma das pistas em relação à outra, quer seja numa corrida de uma volta completa ou de mais de uma volta.

Com base nas conclusões tiradas na resolução dos problemas anteriores, sabe-se que nos troços rectilíneos os corredores das pistas exteriores não têm qualquer desvantagem, vindo esta a acontecer apenas nas curvas, o que neste caso quer dizer apenas nas duas semicircunferências de cada pista.

Conclusão: o avanço a dar ao corredor de cada pista em relação a uma pista interior deverá ser: 2π x diferença dos raios x número de voltas (o número de voltas apenas tem importância se se considerar que os corredores se mantêm sempre na mesma pista).

Este problema foi sempre discutido com grande entusiasmo, pois os alunos perceberam melhor porque é que, em certas provas de atletismo disputadas em estádio, a linha de partida não é a mesma para todos os corredores. Perceberam, também, porque é que nas provas de 60, 100 e 110 metros já não há esse problema (não se chegando a efectuar a curva, não há qualquer desvantagem para nenhum corredor).

Corridas de carrinhos eléctricos

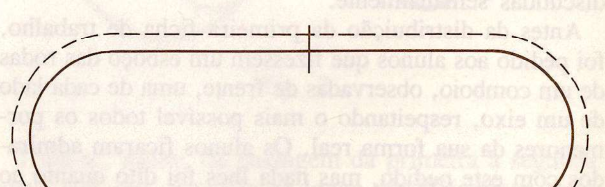

Fig. 5

A figura anterior representa uma pista de carrinhos eléctricos com duas faixas, simbolizadas cada uma por uma linha (faixa interior — linha a cheio, faixa exterior — linha a tracejado).

Supondo que as faixas distam entre si 4 cm, pergunta-se qual dos dois carros ganhará a corrida que consta de uma volta completa, supondo que partem ao mesmo tempo com velocidades iguais e constantes?

Para responder a esta questão, a informação de que as pistas distam entre si 4 cm é desnecessária. Os alunos responderam de imediato que ganhava o carro da pista a cheio, dando a entender que a pergunta até se tornava ridícula, depois de tudo o que já tinham discutido até aqui. A figura seguinte representa uma pista montada de outra forma e a pergunta que se coloca é a mesma.

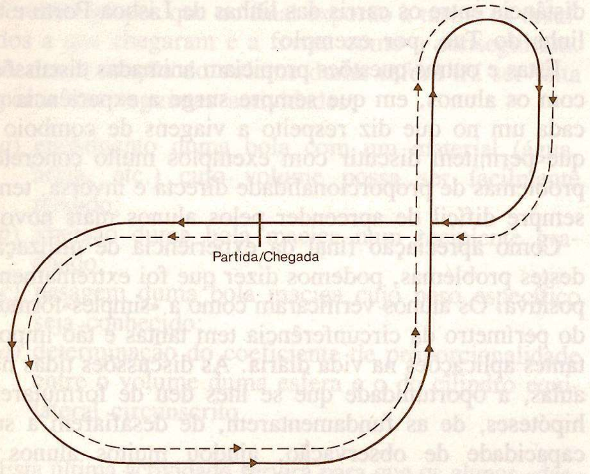

Fig. 6

Já sabemos que nos troços rectilíneos não há desvantagem. Sabemos também que, nas curvas, a desvantagem não depende do raio da curva mas apenas da distância entre as faixas.

Como nesta pista a distância entre as faixas é sempre constante ao longo de todo o percurso, vamos então analisar o que se passa em cada curva. O trabalho fica facilitado se numerarmos as curvas, como se indica na figura.

A curva I é uma semicircunferência em que o carro da faixa interior (a tracejado) consegue um avanço, avanço esse que vai perder na curva III, pois é também uma semicircunferência que ele passa agora a descrever pelo lado exterior (embora os raios das curvas variem, isso não vai influenciar, como já sabemos). Na curva II, o carro da faixa tracejada consegue novamente um avanço, desta vez de um quarto de circunferência, mas torna a perdê-lo mais tarde, quando percorre a curva IV pelo lado exterior.

Uma vez que sabemos a distância entre as pistas (4 cm), podemos até calcular a vantagem de cada carro em cada curva:

Depois de percorrida a curva:	Vantagem do carro da pista a tracejado:
I	4π cm
II	6π cm
III	2π cm
IV	0

Como reagiram os alunos a este problema? A primeira reacção foi esquecerem-se das conclusões que tinham tirado anteriormente e «deixarem-se vencer» pela intuição. Assim, a maior parte dos alunos concluiu que era o carro da pista a tracejado que ganhava, pois conseguia um avanço maior nas curvas que descrevia pelo interior, uma vez que essas curvas tinham um perímetro superior àquelas que ele efectuava pelo lado exterior. A numeração das diferentes curvas, como fizemos anteriormente, ajudou a discussão do problema e, a partir daqui, os alunos assimilaram definitivamente as conclusões tiradas.

A forma das rodas do comboio

As rodas (de um e outro lado) de um comboio estão rigidamente ligadas a um único e resistente eixo. O número de rotações que uma roda efectua é pois exactamente o mesmo que a outra roda também efectua.

Quando o comboio descreve uma curva semi-circular como a da figura 8, a roda exterior descreve um trajecto mais longo que a roda interior. Como se explica então que ao fazer a curva o comboio não descarrile, demorando as duas rodas exactamente o mesmo tempo a percorrer trajectos de comprimentos diferentes?

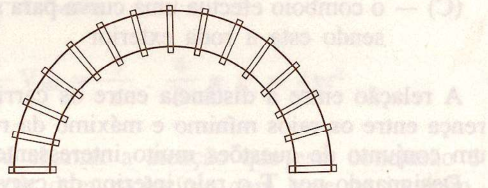

Fig. 7

Quando este problema foi discutido com os alunos, já tinham decorrido alguns meses de trabalho e, depois de muita insistência já todos tinham conseguido desenhar as rodas do comboio quase correctamente. Numa das escolas, um aluno conseguiu mesmo arranjar um desenho real das rodas, trazido por um familiar que trabalhava na Sorefame.

A figura 9 apresenta um esboço das rodas.

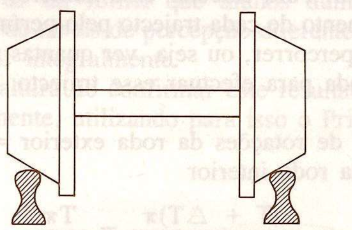

Fig. 8

Curiosamente, alguns alunos conseguiram por eles próprios e sem muita dificuldade, justificar esta forma das rodas. Alguns fizeram mesmo esquemas, no quadro, das várias posições em que a roda pode tocar o carril, consoante as curvas dadas pelo comboio.

Qual é então a ligação entre a forma das rodas do comboio e o modo como efectua as curvas? Para que as duas rodas, efectuando o mesmo número de rotações, consigam descrever, no mesmo tempo, trajectos de diferentes comprimentos, é necessário que não tenham as mesmas dimensões. A forma como são construídas possibilita que, em situações diferentes, a mesma roda tenha um raio diferente (o que se vai traduzir por uma alteração do seu perímetro).

A figura seguinte esquematiza três possíveis posições de contacto da roda com o carril.

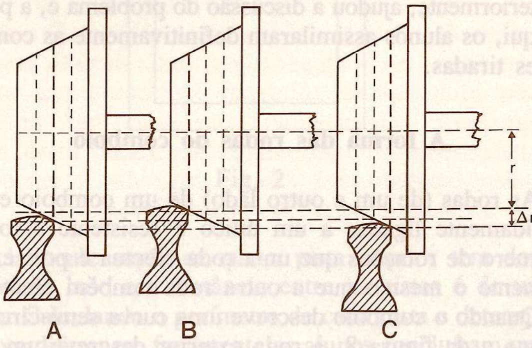

Fig. 9

(A) — o comboio desloca-se em linha recta
(B) — o comboio efectua uma curva para a direita, sendo esta a roda interior
(C) — o comboio efectua uma curva para a esquerda, sendo esta a roda exterior

A relação entre a distância entre os carris e a diferença entre os raios mínimo e máximo da roda suscita um conjunto de questões muito interessantes.

Designando por **T** o raio interior da curva semi-circular que o comboio pode descrever (fig. 9) e por **$\triangle$T** a distância entre os carris; designando ainda por **r** a medida mais pequena do raio da roda e por **r + $\triangle$r** a medida maior, pergunta-se: «Qual a relação matemática entre **T, $\triangle$T, r** e **$\triangle$r** ?».

Uma das possíveis resoluções:
distância percorrida pela roda exterior: $(T + \triangle T)\pi$
distância percorrida pela roda interior: $T\pi$

Sabemos que o número de rotações das duas rodas tem de ser igual. Para calcular esse número, basta dividir o comprimento de cada trajecto pelo perímetro da roda que o vai percorrer, ou seja, ver quantas vezes tem de rodar a roda para efectuar esse trajecto.

Assim:
Número de rotações da roda exterior = número de rotações da roda interior

$$\frac{(T + \triangle T)\pi}{2\pi\,(r + \triangle r)} = \frac{T\pi}{2\pi r}$$

resolvendo em ordem a T:

$$T = \frac{r\triangle T}{\triangle r}$$

Com base nesta relação e se soubermos as medidas de **r** e **$\triangle$r,** podemos facilmente calcular qual o menor raio da curva circular que o comboio pode descrever.

Podemos ainda discutir variadas questões, tais como:

— Quais seriam as modificações a fazer nas dimensões das rodas dos comboios se se aumentasse a distância entre os carris, pretendendo-se ainda que o comboio descreva curvas muito acentuadas?

— Porque será que os comboios que circulam em linhas sem curvas muito acentuadas apresentam uma menor inclinação nas rodas (ou seja, menor $\triangle$r)? Porque será que os carris desses mesmos comboios têm entre si uma distância muito superior à distância dos carris das linhas com curvas muito acentuadas? É notória a diferença entre a forma das rodas dos comboios e a distância entre os carris das linhas de Lisboa-Porto e da linha do Tua, por exemplo.

Estas e outras questões propiciam animadas discussões com os alunos, em que sempre surge a experiência de cada um no que diz respeito a viagens de comboio e que permitem discutir com exemplos muito concretos problemas de proporcionalidade directa e inversa, tema sempre difícil de apreender pelos alunos mais novos.

Como apreciação final da experiência de utilização destes problemas, podemos dizer que foi extremamente positiva. Os alunos verificaram como a «simples»fórmula do perímetro da circunferência tem tantas e tão importantes aplicações na vida diária. As discussões tidas nas aulas, a oportunidade que se lhes deu de formularem hipóteses, de as fundamentarem, de desafiarem a sua capacidade de observação, ajudou muitos alunos a interessarem-se mais pela disciplina, a adquirirem uma maior autoconfiança, a olharem «de outra forma» para aquilo que os rodeia, a terem mais confiança na utilidade da Matemática. Em suma, estes alunos melhoraram significativamente a sua pré-disposição para a aprendizagem.

No final das aulas, foi pedido a todos os alunos que escrevessem, numa folha branca não identificada, a sua opinião e crítica sobre o decorrer das aulas de Matemática desse ano lectivo. Curiosamente, alguns alunos referiram esta aplicação. A forma como o fizeram mostra que os aspectos positivos por nós apontados não lhes passaram despercebidos. Citamos em seguida dois extractos da opinião de dois alunos, que disso são exemplo:

«(...) percebi a matéria e fiquei ciente de que a posso utilizar no futuro, num curso que eu hei-de tirar ou numa aplicação na vida actual. Gostei das aulas e da matéria...»

« Penso que as aulas de Matemática foram criativas. O facto de se ter introduzido as fichas sobre as pistas de atletismo e os problemas da semana, quebrou a monotonia das aulas e fez-me interessar mais pela Matemática...»

Os colegas que quiserem adquirir as fichas de trabalho utilizadas nestas aulas, poderão pedi-las pelo correio...

Bibliografia:

Krause, F.E.(1982). Some applications of the Circunference formula. *Mathematics Teacher*, Vol 25, n.º 5